

Postulat kwantowania Bohra, czyli założony ad hoc związek pomiędzy falą de Broglie'a a geometrycznymi własnościami rozważanego problemu, pozwolił bez większych trudności teoretycznie przewidzieć rozmiary atomów. Wynik ten był jednak tylko pierwszą jaskółką zapowiadającą dużo ważniejsze i bardziej spektakularne przewidywania teoretyczne. Atomowa struktura powoli przestawała być zagadką dla ówczesnej fizyki.

Główna liczba kwantowa n	Energia elektronu [eV]
1	-13,61
2	-3,40
3	-1,52
4	-0,85



Sukces atomowej teorii Bohra

WSZYSTKO Z JEDNEGO POSTULATU

Cały sukces atomowej teorii Bohra opiera się na jednym prostym założeniu – elektron poruszający się wokół jądra może to robić tylko po takich orbitach, na których



Tomasz Sowiński w 2005 roku skończył z wyróżnieniem studia na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego w zakresie fizyki teoretycznej. Obecnie jest asystentem w Centrum Fizyki Teoretycznej PAN. Z zamiłowania zajmuje się popularyzacją nauki.

W roku 2005 był nominowany do nagrody w konkursie Popularyzator Nauki organizowanym przez Ministerstwo Nauki i Informatyzacji oraz Polską Agencję Prasową.

2π , a p i R to oczywiście odpowiednio pęd elektronu na orbicie i promień tej orbity.

Jak pamiętamy z poprzedniego odcinka, ten prosty przepis poprowadził nas dość prosto do przewidzenia, jakie są promienie kolejnych atomowych orbit, które doskonale zgadzały się z doświadczalnymi ograniczeniami na rozmiary atomów. Tym razem wykorzystamy ten postulat do znalezienia dozwolonych energii, jakie może mieć elektron znajdujący się w atomie. Będzie to miało kluczowe znaczenie doś-

Fundamentalna tabelka atomu

Tomasz Sowiński

długość fali de Broglie'a stowarzyszonej z elektronem mieści się całkowitą liczbę razy. Choć już o tym wspominaliśmy wielokrotnie, podkreślimy jeszcze raz jego matematyczną formułę, bez której nie jest łatwo otrzymywać żadnych ilościowych wyników. Jak Czytelnik zapewne pamięta (MT 09/07) postulat sprowadza się do przepisu „na kwantowanie” momentu pędu elektronu

$$p \cdot R = n\hbar$$

W powyższym wzorze n numeruje kolejne dozwolone orbity. Przypomnijmy, że dla $n=1$ orbitę nazywamy orbitą **stanu podstawowego**. Wielkość \hbar jest dobrze nam już znaną stałą Plancka podzieloną przez

wiadczalne, gdyż ENERGIA jest jedną z tych wielkości, które potrafimy doświadczalnie mierzyć, dostarczać i pobierać z najwyższymi dokładnościami.

ENERGIA KINETYCZNA ELEKTRONU

Na energię ruchu elektronu wokół atomowego jądra składają się dwa czynniki. Pierwszym z nich jest dobre nam znana energia kinetyczna, która jest związana z tym, że elektron porusza się z pewną (jak pamiętamy niemalą) prędkością. Z lekcji fizyki w szkole wiemy bowiem, że każde poruszające się ciało obdarzone masą ma energię kinetyczną. Jest tak



Zwiększenie prędkości z 50 km/h do 70 km/h powoduje aż dwukrotne zwiększenie energii kinetycznej!

dlatego, że aby je zatrzymać, należy wykonać pewną pracę. Banalną wręcz obserwacją jest to, że czym ciało ma większą prędkość, tym ma większą energię kinetyczną. Niebanalne jest to, że dwukrotne zwiększenie prędkości ciała powoduje aż CZTEROKROTNY wzrost jego energii kinetycznej. Szczególnie mocno muszą zwrócić uwagę na ten fakt kierowcy. **Powinni pamiętać, że zwiększenie prędkości z dozwolonych w terenie zabudowanym 50 km/h do 70 km/h powoduje aż dwukrotne zwiększenie energii kinetycznej!** W razie nieszczęśliwego wypadku będzie to miało niewątpliwie kolosalne znaczenie.

Elektron w atomie oczywiście również energię kinetyczną posiada. Wyliczmy teraz, jaka ona jest w zależności od numeru orbity n , na której elektron się znajduje. Wzór na energię kinetyczną każdy potrafi napisać bez dłuższego zastanowienia, gdyż pojawia się on praktycznie na każdej lekcji fizyki. Ma on postać:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

Druga postać tego wzoru jest mniej znana, ale do naszych celów bardziej użyteczna. Wynika ona bezpośrednio z pierwszej, jeśli uwzględnimy, że pęd p ciała to po prostu iloczyn masy ciała m i jego prędkości v . Wzór ten jest przydatny zawsze tam, gdy raczej jesteśmy zainteresowani pędem ciała, a nie jego prędkością. W wypisanej przez nas formule wyrażającej matematycznie postulat kwantowania Bohra, występuje właśnie pęd, a nie prędkość.

Wykorzystując postulat kwantowania Bohra możemy w łatwy sposób pozbyć się pędu we wzorze na energię kinetyczną. Otrzymamy wtedy następujący wzór:

$$E_k = \frac{\hbar^2 n^2}{2mR^2}$$

gdzie teraz w jawny sposób pojawił się w naszym wzorze promień orbity R oraz główna liczba kwantowa n . Możemy jednak wykorzystać wzór na promień orbity, który wyprowadziliśmy sobie już wcześniej (MT 10/07). Przypomnijmy, że otrzymaliśmy go, wykorzystując postulat kwantowania Bohra oraz fakt, że w ruchu po okręgu siła oddziaływania elektrostatycznego pełni funkcję siły dośrodkowej. Ma on postać:

$$R = \frac{\hbar^2 n^2}{mke^2}$$

Jak pamiętamy, k to tzw. stała oddziaływania elektrostatycznego (MT 09/07), której doświadczalna wartość wynosi $k \approx 9,0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$.

Czytelnik łatwo sprawdzi, że wstawiając tę zależność do naszego wzoru na energię kinetyczną, otrzymamy następujący związek pomiędzy energią kinetyczną elektronu a numerem dozwolonej orbity n , po której on krąży

$$E_k = \frac{mk^2 e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

Ze wzoru tego płynie natychmiastowy wniosek, że energia kinetyczna elektronu **maleje z kwadratem numeru orbity**, po której krąży. Im orbita, po której porusza się elektron, ma większy promień, tym jego prędkość jest mniejsza.

Energia kinetyczna nie jest jednak jedyną, jaką posiada elektron na orbicie. Nie jest on bowiem elektronem swobodnym, ale znajduje się w obszarze oddziaływania z dodatnio naładowanym jądrem. Ma w związku z tym dodatkową energię – energię potencjalną oddziaływania elektrostatycznego.

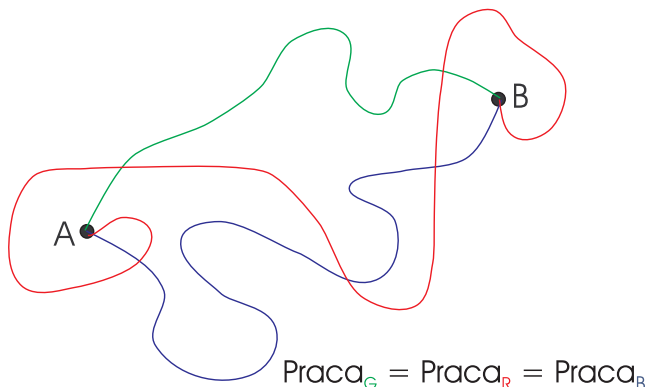
CO TO JEST ENERGIA POTENCJALNA?

Pojęcie energii potencjalnej sprawia początkującym fizykom dużo większe trudności niż pojęcie energii kinetycznej. Jest tak dlatego, że energia potencjalna, związana z oddziaływaniem, jest dużo bardziej abstrakcyjnym obiektem niż kinetyczna (związana z ruchem). Czym jest ruch, każdy bowiem wie, bo widział. Oddziaływanie można jedynie sobie wyobrażać. Spróbujmy zatem małymi kroczkami wytłumaczyć, czym jest energia potencjalna.

Wyobraźmy sobie sytuację, że ciało znajduje się w pewnym miejscu w przestrzeni i działa na nie pewna zewnętrzna siła. W zależności od tego, w którym miejscu w przestrzeni to ciało się znajduje, może działać na nie inna (lub w szczególnym przypadku taka sama) siła. Nie jest istotne w tym momencie, skąd ta siła pochodzi. Ale dla uproszczenia możemy sobie zawsze myśleć, że jej źródłem jest jakieś inne ciało. Wyobraźmy teraz sobie, że chcemy przesunąć nasze ciało z jednego miejsca w przestrzeni w inne. Ze względu na fakt, że podczas przesuwania na nasze próbne ciało działa zewnętrzna siła, będziemy musieli wykonać pewną **PRACĘ** przeciwko tej sile, aby skutecznie ciało przesunąć. Ponieważ jednak w każdym

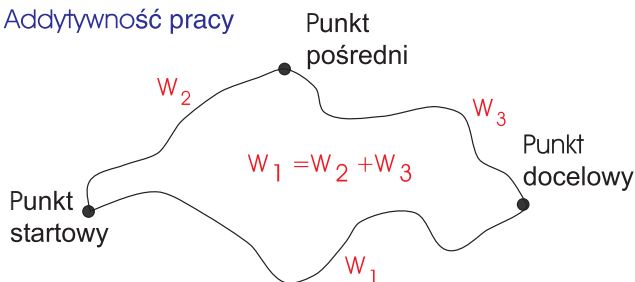
momencie działająca siła może mieć inną wartość, a nawet kierunek i zwrot, to w ogólności praca ta będzie zależała od drogi, jaką wybierzemy, aby ciało przesunąć z jednego miejsca w drugie. Sytuacja może być bardzo skomplikowana i wyliczenie optymalnej drogi może być bardzo trudne, a nawet niemożliwe.

Wśród wszystkich takich sytuacji istnieje jednak bardzo ważna klasa sił, tzw. **sił potencjalnych**, z którymi mamy bardzo często do czynienia. Siły potencjalne to takie siły, dla których *praca potrzebna do przesunięcia ciała z jednego punktu do drugiego zupełnie nie zależy od drogi, po jakiej dokonujemy tego przesunięcia, a jedynie od tego, jaki jest punkt startowy i końcowy*. Sytuację taką prezentuje poniższy rysunek:

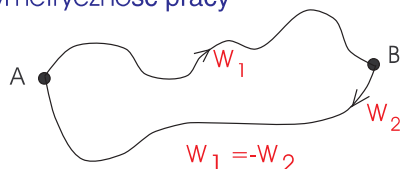


Taka sytuacja sprawia, że wykonywana praca ma bardzo ciekawe własności. Spełnia ona np. **warunek addytywności**. Tzn. praca potrzebna na przesunięcie ciała z punktu startowego do końcowego jest równa sumie pracy potrzebnej do przesunięcia ciała z punktu startowego do pewnego punktu pośredniego i pracy potrzebnej do przesunięcia ciała z tego punktu pośredniego do końcowego. Inną własnością jest np. jej **antysymetryczność**, tzn. że praca potrzebna do przesunięcia ciała z pewnego punktu A do B jest dokładnie równa, **ale z przeciwnym znakiem**, pracy potrzebnej do przesunięcia ciała z punktu B do A. Jest to oczywiste, bo praca z punktu A do A musi być równa zero – nie zależy bowiem od drogi. To wszystko oznacza, że jeśli przesuwając ciało z A do B, wykonaliśmy jakąś pracę, to w drodze powrotnej pracę tę możemy odzyskać. To działające siły potencjalne ją za nas wykonają. Stąd właśnie bierze się ten znak minus. Obie powyżej opisane sytuacje prezentuje poniższy rysunek:

Addytywność pracy



Antysymetryczność pracy



W takiej uproszczonej sytuacji, gdy mamy do czynienia z siłami potencjalnymi, możemy wprowadzić pojęcie energii potencjalnej. W tym celu należy wybrać (całkowicie dowolnie) jeden punkt, względem którego będziemy mierzyli tę energię, zwany punktem odniesienia. Następnie wszystkim innym punktom należy przypisać energię potencjalną równą pracy potrzebnej, aby przesunąć nasze ciało z punktu odniesienia właśnie do tego miejsca. Ponieważ sytuację ograniczyliśmy do sił potencjalnych, to wykonana praca nie zależy od drogi, po której będziemy przesuwać ciało. Tym samym energia potencjalna w danym punkcie jest zdefiniowana w sposób jednoznaczny. Gdy mamy określoną energię potencjalną naszego ciała w każdym punkcie przestrzeni, a opisana powyżej procedura przynajmniej teoretycznie to umożliwia, to bardzo łatwo jest znaleźć pracę, jaką należy wykonać, przesuując ciało pomiędzy dwoma dowolnymi punktami. Jest to po prostu różnica energii potencjalnych dla tych dwóch punktów. Jako ćwiczenie pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie, że choć sama energia zależy od wyboru punktu odniesienia, to różnica energii pomiędzy dwoma punktami jest już od niego całkowicie niezależna.

Podsumowując, można powiedzieć tak: *Energia potencjalna to taka wielkość fizyczna, której różnica pomiędzy dwoma punktami w przestrzeni określa pracę, jaką należy wykonać, aby przemieścić ciało z jednego miejsca do drugiego*. W tym miejscu musimy zwrócić uwagę na jeden bardzo fundamentalny fakt. Sama energia potencjalna nie ma dobrej interpretacji fizycznej. Jej wartość zależy bowiem od arbitralnego wyboru punktu odniesienia. Obiektywne znaczenie ma tylko różnica energii potencjalnych, gdyż to właśnie ta różnica określa pracę do wykonania – coś, co możemy zmierzyć bezpośrednio w eksperymencie.

ENERGIA POTENCJALNA ELEKTRONU W ATOMIE

Jesteśmy teraz gotowi do wyliczenia energii potencjalnej elektronu znajdującego się w atomie. W tym celu będziemy potrzebowali wzoru, który ją określa względem jakiegoś punktu w przestrzeni. Może Czytelnikowi wyda się to dość dziwne, ale okazuje się, że bardzo użytecznym punktem, względem którego warto mierzyć energię potencjalną, jest ... **PUNKT W NIESKOŃCZONOŚCI!!** Tak, tak... Pomiar energii po-



tencjalnej względem nieskończoności jest bardzo użyteczny, bo w ten sposób określa pracę, jaką należy wykonać, aby przenieść ciało z bardzo daleka (z nieskończoności) do wybranego punktu. Krótko mówiąc, jest to praca, jaką należy wykonać, aby wprowadzić ciało do rozważanego układu. Gdy zatem mówimy o elektronie na orbicie, będzie to praca, jaką należy wykonać, aby z niezależnego jądra i elektronu zrobić

jeden układ – ATOM. Będzie to oczywiście ta sama praca (tylko wzięta z minusem) jaką należy wykonać, aby atom rozbić na jądro i swobodny elektron, czyli **zjonizować atom**.

Wzór na energię potencjalną oddziaływania elektrostatycznego pomiędzy dwoma ładunkami można wyprowadzić, znając wzór Coulomba (MT 09/07). Wymaga to jednak pewnej wiedzy i wprawy matematycznej, która wyrasta poza szkołę średnią. Dlatego podamy ten wzór bez uzasadnienia, choć jeszcze raz podkreślimy, że można go otrzymać w sposób ścisły. Energia potencjalna oddziaływania pomiędzy dwoma ładunkami q i Q znajdującymi się w próżni w odległości R od siebie mierzona względem nieskończoności (tzn. względem sytuacji, gdy ładunki są nieskończenie daleko od siebie) wyraża się wzorem:

$$E_p = k \frac{q \cdot Q}{R}$$

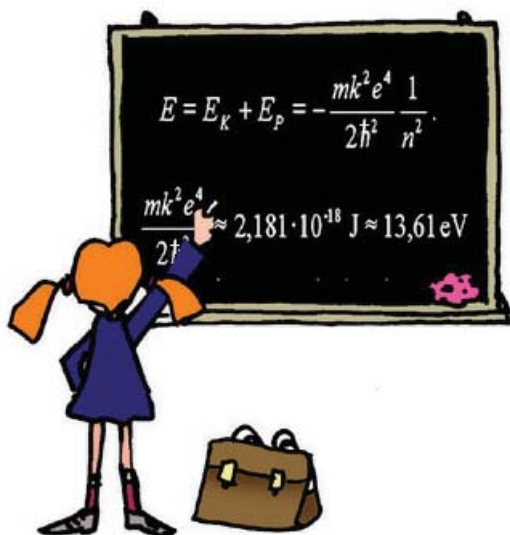
Dla sytuacji, w której oddziałują ze sobą elektron i jądro atomowe o tym samym ładunku (z przeciwnymi znakami), energia potencjalna ma zatem postać:

$$E_p = -\frac{ke^2}{R}$$

gdzie e jest ładunkiem elementarnym (MT 09/07). W oczywisty sposób widać, że energia potencjalna oddziaływania elektronu z protonem jest ujemna! Chwila zastanowienia przekonuje, że oczywiście tak musi być, bo elektron i jądro mają przeciwne znaki i w związku z tym się przyciągają. To oznacza, że praca potrzebna na przysunięcie elektronu do jądra z nieskończoności jest ujemna. To bowiem nie my mamy tę pracę wykonać – to siła przyciągania ją wykona za nas. Gdybyśmy jednak chcieli elektron od jądra odsunąć, to wtedy my musielibyśmy wykonać tę pracę i rzeczywiście będzie ona w tym wypadku dodatnia. Wszystko się zatem zgadza.

Wykorzystajmy teraz wzór na promień orbity atomowej w zależności od głównej liczby kwantowej n , tak jak zrobiliśmy to w przypadku energii kinetycznej,

Energia elektronu w atomie!



Bardzo tajemniczy i wręcz czarodziejski związek między energią kinetyczną i potencjalną

nej, i wstawmy go do naszego wzoru. Otrzymamy wtedy następujący związek pomiędzy energią potencjalną elektronu na dozwolonej orbicie atomowej a numerem tej orbity:

$$E_p = -\frac{mk^2 e^4}{\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

Jak widać, energia potencjalna podobnie jak energia kinetyczna maleje z kwadratem głównej liczby kwantowej. Dokładniej mówiąc, **wartość bezwzględna tej energii tak się zachowuje** (musimy bowiem uwzględnić jeszcze fakt, że energia ta jest ujemna). Przy okazji zauważmy, że zachodzi pewien bardzo tajemniczy i wręcz czarodziejski związek między energią kinetyczną i potencjalną w naszej sytuacji. Jak się dobrze przypatrzemy wzorom wyrażającym te dwie wielkości, to łatwo sprawdzić, że istnieje zależność

$$E_p = -2E_k$$

która zupełnie nie zależy od głównej liczby kwantowej n . Jest to szczególny przejaw bardzo ważnego i ogólnego twierdzenia występującego w fizyce, zwanego **twierdzeniem o wirale**. Być może kiedyś przyjdzie czas, aby się mu dokładniej przyjrzeć. Tymczasem zajmijmy się naszym elektronem.

ENERGIA ELEKTRONU W ATOMIE!

Jesteśmy teraz gotowi, aby znaleźć pełną energię elektronu w atomie, która jest sumą jego energii kinetycznej i potencjalnej. Jak łatwo sprawdzić, wyraża się ona wzorem:

$$E = E_k + E_p = -\frac{mk^2 e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

Spróbujmy teraz wyliczyć, jaka jest ta energia dla kilku pierwszych orbit atomowych. W tym celu w pierwszym kroku wyliczmy współczynnik stojący w powyższym wzorze, wstawiając wartości odpowiednich stałych fizycznych. Czytelnik łatwo się przekona, że współczynnik ten ma wartość:

$$\frac{mk^2 e^4}{2\hbar^2} \approx 2,181 \cdot 10^{-18} \text{ J} \approx 13,61 \text{ eV}$$

Użyliśmy tutaj powszechnie używanej w sytuacjach subatomowych jednostki energii **eV** zwanej **elektronowoltem**. Z definicji jeden elektronowolt to energia kinetyczna, jaką ma jeden elektron przyspieszony napięciem jednego wolta. Jak widać, jednostka ta doskonale pasuje do rzędu energii, z jakimi mamy do czynienia w naszym problemie.



Subatomowa jednostka energii eV

Wypiszmy teraz energię całkowitą elektronu dla kilku pierwszych dozwolonych orbit w atomie, podobnie jak zrobiliśmy to ostatnio dla promienia orbity:

Główna liczba kwantowa	Energia elektronu
n	[eV]
1	-13,61
2	-3,40
3	-1,52
4	-0,85

WIELKI TRIUMF BOHRA

Czytelnik jeszcze zapewne nie zdaje sobie sprawy z faktu, że ta otrzymana powyżej skromna tabelka jest jednym z najważniejszych wyników w historii fizyki teoretycznej i tym samym wielkim triumfem Nielsa Bohra. Co takiego w niej jest, że ośmielam się ją właśnie tak zakwalifikować? O tym opowiemy sobie już w następnym odcinku. Na zachętę jednak uchylę rąbka tajemnicy. Otóż z doświadczeń wykonywanych przez chemików pod koniec XIX i na początku XX wieku, gdy słowo *kwant* w ogóle nie było zna-

Kultowa tabelka

Główna liczba kwantowa	Energia elektronu
n	[eV]
1	-13,61
2	-3,40
3	-1,52
4	-0,85

ne, wynikało, że energia jonizacji atomu wodoru (czyli energia, jaka jest potrzebna, aby pozabawić atom elektronu) wynosi ok. **13,61 eV!** Kto jeszcze nie wie, o co chodzi, niech zajrzy do tabelki... Z niej można jednak wyciągnąć dużo, dużo więcej. Zapraszam za miesiąc! ●