Ćwiczenia, *Mechanika Kwantowa* 16-12-2009
Rachunek zaburzeń III: Drugi rząd rachunku zaburzeń
Rozpraszanie I: w jednym wymiarze

Ćwiczenia

1. *Zjawisko Starka drugiego rzędu w stanie s atomu wodoru.*
   W zewnętrznym jednorodnym polu elektrycznum $\vec{E}$, dodatkowa energia protonu i elektronu (razem) jest
   $$H' = eEz = eEr\cos\theta,$$
   gdzie oś z została oczywiście wybrana wzdłuż kierunku pola $\vec{E}$.
   Zmiana energii niezdegenerowanego stanu $|m\rangle$ w drugim rzędzie rachunku zaburzeń jest
   $$E_m^{(2)} = \sum_{n\neq m} \frac{\left|\langle m|H^{(1)}|n\rangle\right|^2}{E_m^{(0)} - E_n^{(0)}}.$$
   (a) Znaleźć składowe zmiany energii stanu s w drugim rzędzie rachunku zaburzeń pochodzące od powłok elektronowych p i d. [Wyniki: $-1,48E^2a_0^3$, $-0,30E^2a_0^3$]
   (b) Jakie mają właściwości stany "pośrednie" $|m\rangle$ które dają wkład? Czy mają lub nie-mają one elektrycznego momentu dipolowego?
   (c) Czy wydaje się że wkład wyższych powłok elektronowych będzie znaczący?

2. *Rozpraszanie o studnię w jednym wymiarze.*
   Mamy potencjał w systemie jednowymiarowym
   $$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{kiedy } 0 < x < a, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$
   Fale płaskie o liczbie falowej k nadchodzą z lewej.
   (a) Znaleźć współczynniki odbicia $R(E)$ i przejscia $T(E)$ jako funkcja energii E nadchodzących cząstek.
   [Wyniki: $T(E) = \left[1 + \frac{V_0^2}{4E(E+V_0)}\sin^2\alpha a\right]^{-1}$, gdzie α jest liczbą falową w studni: $\alpha^2 = 2m(E+V_0)/\hbar^2$; $R(E) = 1 - T(E)$.]
   (b) Poziomy energetyczne stanów związanych w *nieskończonej* studni potencjału są
   $$E_n^{(V)} = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2ma^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$
   nad dnem. Co się dzieje z współczynnikami R i T w energiach odpowiadających tym poziomom.
   (c) Jak wygląda $R(E)$ kiedy $E \to 0$ i $E \gg V_0$? Narysować w przybliżeniu $R(E)$.

Atom wodoru

$$E_n = -\frac{e^2}{2a_0 n^2} \qquad a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} \qquad \mu = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e}$$

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} \qquad \psi_{nlm} = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi) \qquad n = 1, 2, \ldots; \quad l = 0, \ldots, n-1; m = -l, \ldots, l$$

$$R_{10} = \frac{1}{a_0^{3/2}} 2e^{-r/a_0} \qquad R_{20} = \frac{1}{(2a_0)^{3/2}}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)e^{-r/2a_0} \qquad R_{21} = \frac{1}{(2a_0)^{3/2}}\left(\frac{r}{a_0\sqrt{3}}\right)e^{-r/2a_0}$$

$$R_{30} = \frac{2}{(3a_0)^{3/2}}\left(1 - \frac{2r}{3a_0} + \frac{2r^2}{27a_0^2}\right)e^{-r/3a_0} \qquad R_{31} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\left(\frac{r}{(3a_0)^{5/2}}\right)\left(1 - \frac{r}{6a_0}\right)e^{-r/3a_0} \qquad R_{32} = \frac{1}{(3a_0)^{7/2}}\sqrt{\frac{8}{45}}\, r^2 e^{-r/3a_0}$$

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \qquad Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \qquad Y_{2,\pm1} = \pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi} \qquad Y_{2,\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}$$