Ćwiczenia, *Mechanika Kwantowa* 9-12-2009
Rachunek zaburzeń II
Przypadki z początkową degeneracją

Ćwiczenia

1. *Zjawisko Starka pierwszego rzędu w atomie wodoru.*
   W zewnętrznym jednorodnym polu elektrycznum $\vec{E}$, dodatkowa energia protonu i elektronu (razem) jest
   $$H' = eEz = eEr\cos\theta,$$
   gdzie oś z została oczywiście wybrana wzdłuż kierunku pola $\vec{E}$.
   (a) Znaleźć zmianę energii stanów s i p w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń. [Wyniki: $\delta E = 0; 0, 0, \pm 3eEa_0$]
   (b) Dla których stanów p została usunięta degeneracja, a dla których nie?

2. *Zaburzenie poziomów atomu wodoru spowodowane skończonym rozmiarem protonu.*
   W pewnym przybliżeniu proton może być opisany jako kula z ładunkiem elektrycznym o promieniu $r_* = \epsilon a_0$, gdzie $\epsilon \approx 3 \times 10^{-5}$. Wtedy, potencjał staje się
   $$V(r) = -\frac{e^2 r^2}{r_*^3}, \text{ kiedy } r < r_*$$
   (a) Znaleźć zmianę energii stanów s i p w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń.
   [Wyniki (do najniższych rzędów ϵ): $\delta E = 4\epsilon^2 |E_1|$; $\frac{6\epsilon^2}{5}|E_2|$, $\frac{\epsilon^4}{28}|E_2| \times 3$]
   (b) Któ re stany p mają dużo mniejsze przesunięcie energii?

3. *Zaburzenie dwu-wymiarowego oscylatora harmonicznego.*
   Dwu-wymiarowy oscylator harmoniczny $V(x, y) = \frac{1}{2}\hbar\omega(x^2 + y^2)$ jest zaburzony przez potencjał
   $$H' = \epsilon\hbar\omega xy.$$
   (a) Znaleź'c zmianę energii stanów o niezaburzonych energiach $\hbar\omega, 2\hbar\omega, 3\hbar\omega$, w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń. [Wyniki: $\delta E = 0; \pm\epsilon\hbar\omega; 0, \pm\epsilon\hbar\omega$]
   (b) które stany zostają zaburzone/niezaburzone, i dlaczego?

Atom wodoru

$$E_n = -\frac{e^2}{2a_0 n^2} \qquad a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} \qquad \mu = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e}$$

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} \qquad \psi_{nlm} = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \qquad n = 1, 2, \ldots; \quad l = 0, \ldots, n-1; m = -l, \ldots, l$$

$$R_{10} = \frac{1}{a_0^{3/2}} 2e^{-r/a_0} \qquad R_{20} = \frac{1}{(2a_0)^{3/2}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0} \qquad R_{21} = \frac{1}{(2a_0)^{3/2}} \left(\frac{r}{a_0\sqrt{3}}\right) e^{-r/2a_0}$$

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \qquad Y_{1,\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi}$$

Dwu-wymiarowy oscylator harmoniczny

$$E_{nm} = \hbar\omega\,(1 + n + m) \qquad n, m = 0, 1, \ldots \qquad V(x, y) = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(x^2 + y^2\right) \qquad \psi_{nm} = \psi_n(x)\psi_m(y)$$

$$\psi_n(x) = \frac{e^{-x^2/2} H_n(x)}{\sqrt{n! 2^n \sqrt{\pi}}} \qquad H_0(\xi) = 1 \qquad H_1(\xi) = 2\xi \qquad H_2(\xi) = 2(2\xi^2 - 1)$$