Ćwiczenia, *Mechanika Kwantowa* 2-12-2009
Rachunek zaburzeń I

Ćwiczenia

1. (a) Obliczyć poziomy energetyczne oscylatora harmonicznego $H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ pod wpływem "zaburzenia"

$$H' = \lambda x^2$$

w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń. Przydatne własciwości:

$$|n\rangle = \frac{\left(a^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle, \qquad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle, \qquad a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle, \qquad x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^\dagger).$$

   (b) Czy wynik się zgadza z wartościami otrzymanymi przez podstawienie nowej częstotliwości $\omega'(\lambda)$?
   Uwaga: prawidłowa odpowiedź to "raczej tak", pomimo pozornej niezgodności – ale czemu?

   (c) Dla jakich wartości λ, to przybliżenie jest poprawne?

2. (a) Obliczyć poziomy energetyczne oscylatora harmonicznego pod wpływem nieharmonicznego przyczynku do Hamiltonianu

$$H' = \lambda \left(\frac{m^2\omega^3}{\hbar}\right) x^4$$

w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń.

   (b) Do jak dużych liczb kwantowych $n(\lambda)$ wynik jest w miarę dokładny?

3. (a) Obliczyć zmianę funkcji falowej stanu podstawowego (do pierwszego rzędu w λ) pod wpływem powyższego zaburzenia.

   (b) Czy zaburzona funkcja falowa dalej jest parzysta?

   (c) Czy niezaburzone funkcje falowe $\psi_n^{(0)}$ z dużym n maja wkład w zaburzony stan podstawowy $\psi_0^{(1)}$?

A teraz jeszcze znowu moment pędu, jeżeli starczy czasu ...

1. Sprawdzić wartości oczekiwane kwadratu momentu pędu L^2, i moment pędu wzdłuż osi Z (L_z) w stanie ψ mającym formę kątową:

$$\psi(\vec{r}) = f(r) Y_{l\,l}(\theta, \phi)$$

$$Y_{l\,l}(\theta, \phi) = C \sin^l \theta e^{il\phi}.$$

Uwagi:

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right], \qquad L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}.$$