Ćwiczenia, *Mechanika Kwantowa* 18-11-2009
Moment pędu i atom wodoru

Ćwiczenia

1. Pokazać że reguły komutacji dla momentów pędu $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ są:

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z, \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x, \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y, \quad [L^2, L_i] = 0.$$

2. Dla sferycznie symetrycznego potencjału $V(r)$, równanie Schrödingera we współrzędnych kulistych

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\right\}\psi + V(r)\psi = E\psi$$

może być rozseparowane na trzy niezależne równania w każdej z trzech zmiennych przestrzennych r, θ, ϕ.

(a) wyprowadzić rownania dla $\psi(\mathbf{x}) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ ze stałymi λ, ν:

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \nu\Phi = 0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{\nu}{\sin^2\theta}\right) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left\{\frac{2m}{\hbar^2}[E - V(r)] - \frac{\lambda}{r^2}\right\}R = 0 \tag{3}$$

(b) Rozwiazać równanie (1) i znaleźć zależność stałej ν od $\hbar m$, wartości własnej L_z

(c) Fizycznie sensowne rozwiązania kątowej części funkcji falowej ($Y(\theta, \phi) = \Theta\Phi$) istineją dla $\lambda = l(l+1)$ i $m = -l, \ldots, l$, i sa harmonikami sferycznymi $Y_{l,m}$. Kilka pierwszych ma nastepujące zależności kątowe:

$$\begin{array}{lcclcc}
Y_{0,0} & \sim & 1 & Y_{1,0} & \sim & \cos\theta \\
Y_{1,\pm1} & \sim & \sin\theta e^{\pm i\phi} & Y_{2,0} & \sim & (3\cos^2\theta - 1) \\
Y_{2,\pm1} & \sim & \sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi} & Y_{2,\pm2} & \sim & \sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}
\end{array}$$

Sprawdź jedną lub wiecej z nich: że spełniają równanie Schrödingera i że są funkcjami własnymi kwadratu pędu $L^2 = |\mathbf{L}|^2$ o wartościach własnych $l(l+1)\hbar^2$.

(d) W takim razie, jaki efekt ma człon $-\frac{\lambda R(r)}{r^2}$ w równaniu radialnym (3)?

3. Atom wodoru: Przepisać równanie dla elektronu i protonu we współrzędne środka masy, i określić więc zredukowaną masę μ.

4. Jakiej wielkości jest ta zredukowana masa w przypadku atomu?

5. Rozwiązania równania radialnego dla atomu wodoru $R_{nl}(r)$ mają formę zależną od głównej liczby kwantowej $n = 1, 2, 3, \ldots$ i momentu pędu $l = 0, 1, \ldots, n-1$. Kilka pierwszych wygląda nastepująco:

$$\begin{aligned}
R_{1,0} &\sim e^{-r/a_0} \\
R_{2,0} &\sim \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)e^{-r/2a_0} \\
R_{2,1} &\sim re^{-r/2a_0}
\end{aligned}$$

gdzie promien Bohra jest $a_0 = \hbar^2/(\mu e^2)$.

(a) Rozrysuj (schematycznie) rozkład prawdopodobieństwa w przestrzeni kilku takich orbitali $\psi_{nlm} = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$.

(b) Potwierdź energie własne:

$$E_n = -\frac{e^2}{2a_0 n^2}$$

(c) Dla elektronu w atomie wodoru znajdującego się (na przykład) w stanie 1s, obliczyć średnia odległosc od jądra.