Ćwiczenia, *Mechanika Kwantowa* 14-10-2009

1. Mamy wolną przestrzeń jedno-wymiarową of długości L, z falami płaskimi $\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx-\omega t}$. Zlokalizowana funkcja falowa jest uformowana przez liniową superpozycje wielu fal płaskich jako:

$$\psi = A \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2}\right] \psi_k(x) dk.$$

   Obliczyć:

   (a) Średni pęd.

   (b) Średnią pozycję jako funkcja czasu

   Uwagi:

   - Przyda sie na początek obliczyć $\omega(k)$!
   - Całka $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2\sigma^2} dy = \sigma\sqrt{2\pi}$, niezależnie od tego czy σ jest rzeczywiste czy zespolone, pod warunkiem że $\mathrm{Re}[\sigma^2] \geq 0$.
   - Używając powyższe, można obliczyć $\psi(x)$ bezpośrednio z pewnym trudem, a potem średnie pedy itp już łatwo. Alternatywnie, można obliczać średnie wartości bezpośrednio korzystając z $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} dy = 2\pi\delta(k)$. Wybór należy do Ciebie…

2. Mamy skończony potencjał pudełko o długości $2a$ w jednym wymiarze:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{kiedy } -a < x < a \\ V_0 & \text{kiedy } |x| > a \end{cases}$$

   Obliczyć pierwsze trzy najniższe poziomy energii i ich stany własne kiedy $V_0 = \frac{6\hbar^2}{ma^2}$. Przyjmujemy następujące warunki brzegowe:

   (a) $\psi(x) \to 0$ kiedy $x \to \infty$. Inaczej, nie była by normalizowalna!

   (b) $\psi(x)$ jest ciągła i gładka w punktach $|x| = a$. Inaczej gęstość energii lub pędu w tych miejscach była by nieskończona!

   (c) Energia cząstki opisanej przez $\psi(x)$ jest taka sama w pudle i poza nim. Takie było założenie wstępne!