

Ćwiczenia, *Mechanika Kwantowa* 13-01-2010

Moment pędu ponownie

Ćwiczenia

1. Obliczyć wzajemne relacje komutacyjne pomiędzy operatorami momentu pędu L_x, L_y, L_z i $L^2 = \sum_j L_j^2$. Dla jakich par operatorów może istnieć wspólna ortogonalna baza?

2. Pokazać że skalarna funkcja falowa poddana infinytezymalnemu obrotu ε współrzędnych wokół osi z zmienia się na

$$\psi' = e^{-i\varepsilon L_z/\hbar}\psi.$$

To znaczy, że średnie wartości pozycji transformują się jak

$$\begin{aligned}\langle \psi' | x | \psi' \rangle &= \cos \varepsilon \langle \psi | x | \psi \rangle - \sin \varepsilon \langle \psi | y | \psi \rangle \\ \langle \psi' | y | \psi' \rangle &= \sin \varepsilon \langle \psi | x | \psi \rangle + \cos \varepsilon \langle \psi | y | \psi \rangle \\ \langle \psi' | z | \psi' \rangle &= \langle \psi | z | \psi \rangle.\end{aligned}$$

itd.

3. Załóżmy że istnieje baza $|\alpha, \beta\rangle$ wspólna dla operatorów L^2 i L_z , tak że

$$L^2|\alpha, \beta\rangle = \alpha|\alpha, \beta\rangle \quad \text{oraz} \quad L_z|\alpha, \beta\rangle = \beta|\alpha, \beta\rangle.$$

Definiujemy operatory podwyższające i obniżające

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y.$$

Pokazać że spełniają one związki komutacyjne

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm \hbar L_{\pm} \quad \text{oraz} \quad [L^2, L_{\pm}] = 0.$$

4. Pokazać że $L_{\pm}|\alpha, \beta\rangle \propto |\alpha, \beta \pm \hbar\rangle$, czyli że L_{\pm} podnoszą/obniżają moment pędu wokół osi z . Co to wskazuje o stanach własnych $|\alpha, \beta\rangle$?

5. Zaczynając od $\langle \alpha, \beta | L^2 - L_z^2 | \alpha, \beta \rangle$, pokazać że $\alpha \geq \beta^2$. Co to wskazuje o stanach własnych $|\alpha, \beta\rangle$?

6. Argumentować czemu kombinacja powyższych wyników prowadzi do wniosku że istnieją maksymalne i minimalne wartości β_{\max} i β_{\min} .

7. Znaleźć β_{\max} jako funkcja α oraz k – ilości kroków o długości \hbar między β_{\max} a β_{\min} .

8. Pokazać że $\alpha = \hbar^2 \frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} + 1 \right)$.

9. Co to wskazuje o dozwolonych wartościach momentu pędu L_z ?

10. Dla porównania, znaleźć dozwolone wartości momentu pędu L_z w bazie położenia, biorąc pod uwagę funkcje falowe $\psi_{l_z}(r, \theta, \phi)$ takie że $L_z \psi_{l_z}(r, \theta, \phi) = l_z \psi_{l_z}(r, \theta, \phi)$.

11. Jak można pogodzić ze sobą odmienne wyniki dotyczące dozwolonych wartości momentu pędu L_z uzyskane z podejścia komutatorowego i podejścia w bazie położenia?

Współrzędne sferyczne

$$\begin{aligned}L_x &= i\hbar \left[\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \\ L_y &= i\hbar \left[-\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \\ L_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}\end{aligned}$$