

Michał Wasiak

## Autoreferat

### Dyplomy i stopnie naukowe

- 2004** Doktorat z fizyki nadany przez Instytut Fizyki Politechniki Łódzkiej. Tytuł pracy: *Optical gain in quantum dot lasers*. Promotor: prof. dr hab. Maciej Bugajski.
- 1999** Dyplom ukończenia studiów na kierunku fizyka techniczna na Wydziale Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej Politechniki Łódzkiej w Łodzi i uzyskania tytułu magistra inżyniera. Tytuł pracy magisterskiej *Wzmocnienie optyczne w laserze z kwantowym obszarem czynnym*. Promotor: prof. dr hab. Maciej Bugajski.

### Zatrudnienie w jednostkach naukowych

- od 2005** Adiunkt w Instytucie Fizyki Politechniki Łódzkiej
- 1999–2005** Asystent w Instytucie Fizyki Politechniki Łódzkiej

### Cykl publikacji: Modelowanie zjawisk fizycznych w laserach półprzewodnikowych

### Omawiane publikacje

- [1] **M. Wasiak**. "Quantum-enhanced uniformity of carrier injection into successive quantum wells of multi-quantum-well structures". In: *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures* 41.7 (2009), pp. 1253–1257. ISSN: 1386-9477. DOI: 10.1016/j.physe.2009.02.013.
- [2] **M. Wasiak**. "Mathematical rigorous approach to simulate an over-threshold VCSEL operation". In: *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures* 43.8 (2011), pp. 1439–1444. ISSN: 1386-9477. DOI: 10.1016/j.physe.2011.03.022.
- [3] L. Frasunkiewicz, T. Czyszanowski, **M. Wasiak**, M. Dems, R.P. Sarzała, W. Nakwaski, and K. Panajotov. "Optimization of Single-Mode Photonic-Crystal Results in Limited Improvement of Emitted Power and Unexpected Broad Range of Tuning". In: *Journal of Lightwave Technology* 31.9 (May 2013), pp. 1360–1366. ISSN: 0733-8724. DOI: 10.1109/JLT.2013.2247565.

**Wkład własny (20%):** Stworzenie modelu pracy nadprogowej laserów VCSEL.

- [4] **M. Wasiak**, M. Bugajski, and W. Nakwaski. "Envelope function description of quantum cascade laser electronic states". In: *Optica Applicata* 35 (2005).  
**Wkład własny (70%)**: Opracowanie modelu pozwalającego na znajdowanie funkcji falowych stanów w strukturze spolaryzowanych supersieci i wykonanie obliczeń numerycznych.
- [5] M. Motyka, F. Janiak, J. Misiewicz, **M. Wasiak**, K. Kosiel, and M. Bugajski. "Determination of energy difference and width of minibands in GaAs/AlGaAs superlattices by using Fourier transform photoreflectance and photoluminescence". In: *Opto-Electronics Review* 19 (2011), pp. 151–154.  
**Wkład własny (20%)**: Ilościowa teoretyczna i numeryczna analiza przejść wewnątrz- i międzypasmowych w strukturach supersieci, obliczenie energii i względnych intensywności przejść promienistych.
- [6] Ł. Piskorski, **M. Wasiak**, R.P. Sarzała, and W. Nakwaski. "Tuning effects in optimisation of GaAs-based InGaAs/GaAs quantum-dot VCSELs". In: *Optics Communications* 281.11 (2008), pp. 3163–3170. ISSN: 0030-4018. DOI: 10.1016/j.optcom.2008.02.011.  
**Wkład własny (35%)**: Opracowanie modelu wzmocnienia w kropkach kwantowych, analiza statystycznych własności zbioru kropek, interpretacja wyników symulacji dotyczących wzmocnienia.
- [7] V. Iakovlev, J. Walczak, M. Gębski, A.K. Sokół, **M. Wasiak**, P. Gallo, A. Sirbu, R.P. Sarzała, M. Dems, T. Czyszanowski, and E. Kapon. "Double-diamond high-contrast-gratings vertical external cavity surface emitting laser". In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 47.6 (2014), p. 065104.  
**Wkład własny (12%)**: Stworzenie koncepcji modelu cieplnego laserów pompowanych optycznie, dostosowanie modelowania do technologii wykorzystywanej przez grupę na EPFL; symulacje termiczne laserów VECSEL, prace eksperymentalne nad laserami VECSEL.
- [8] **M. Wasiak**, R.P. Sarzała, and A. Jasik. "Temperature reduction in vertical-external-cavity surface-emitting-lasers (VECSEL) active region". In: *Transparent Optical Networks, 2009. ICTON '09. 11th International Conference on*. July 2009, pp. 1–3. DOI: 10.1109/ICTON.2009.5185028.  
**Wkład własny (60%)**: Stworzenie koncepcji modelu cieplnego laserów pompowanych optycznie, wykonanie numerycznych obliczeń termicznych różnych struktur laserów VECSEL i analiza zjawisk fizycznych zachodzących w różnych typach konstrukcji.
- [9] **M. Wasiak**, P. Śpiewak, P. Moser, J. Walczak, R.P. Sarzała, T. Czyszanowski, and J.A. Lott. "Numerical model of capacitance in vertical-cavity surface-emitting lasers". In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 49.17 (2016), p. 175104.  
**Wkład własny (70%)**: Opracowanie modelu pojemności i czasowych przebiegów prądu w laserach VCSEL; analiza danych eksperymentalnych.
- [10] **M. Wasiak**, P. Śpiewak, P. Moser, and J.A. Lott. *Capacitance and modulation time constant in oxide-confined vertical-cavity surface-emitting lasers with different oxide layers*. Invited talk at Photonics Europe 2016. Brussels, Apr. 2016.  
**Wkład własny (70%)**: Wykorzystanie modelu pojemności i modeli optycznych do analizy parametrów modulacyjnych arsenkowych i azotkowych laserów VCSEL.

## Spis treści

Dyplomy i stopnie naukowe . . . . .	1
Zatrudnienie w jednostkach naukowych . . . . .	1
Cykl publikacji: Modelowanie zjawisk fizycznych w laserach półprzewodnikowych . . . . .	1
Omawiane publikacje . . . . .	1
1. Wstęp . . . . .	3
2. Tunelowanie nośników w strukturze wielokrotnych studni kwantowych [1] . . . . .	5
3. Model nadprogowy [2, 3] . . . . .	8
4. Lasery kaskadowe i supersieci [4, 5] . . . . .	11
4.1. Zastosowania modelu . . . . .	14
5. Lasery z kropkami kwantowymi [6] . . . . .	15
6. Lasery typu VECSEL [7, 8] . . . . .	19
6.1. Wykorzystanie <i>high contrast grating</i> . . . . .	21
7. Model pojemności dla laserów półprzewodnikowych [9, 10] . . . . .	24
8. Podsumowanie . . . . .	28
Literatura . . . . .	31

### 1. Wstęp

Fizyka zajmuje się opisem świata (w tym przewidywaniem wyników eksperymentów) za pomocą matematyki. Od czasu ukształtowania się w tej formie, co można utożsamiać z niezrównanymi osiągnięciami Newtona, fizyka najchętniej zajmuje się opisem wyidealizowanych obiektów (punktów materialnych, kul, nieskończonych płaszczyzn itp.), które w lepszym lub gorszym stopniu mogą być modelem bardzo prostych zjawisk i obiektów występujących w przyrodzie. Wynika to po części (zapewne większej) z oczywistych praktycznych ograniczeń w stosowaniu aparatu matematycznego, ale być może również z jakiegoś zamięłowania umysłu ludzkiego do takich idealizacji. Wystarczy przypomnieć, jak absurdalna wydała się największym umysłom epoki idea eliptycznych orbit planet zaproponowana przez Keplera, mająca zastąpić kołowe epicykle [11]. Zresztą czy to nie ludzie sami tworzą formalizm matematyczny dający się stosować względnie łatwo do punktów i kul, a wymagający dużego wysiłku przy stosowaniu go do rzeczywistych obiektów?

Tę pewną słabość fizyki w opisywaniu świata widać wyraźnie po tym, że choć ma ona dużo do powiedzenia o rzeczach, których nikt nie widział (takich jak kwarki, Wielki Wybuch, niewystępujące naturalnie pierwiastki. . .), pozostaje do tej pory mniej lub bardziej bezradna wobec tak codziennych obiektów i zjawisk jak żywe organizmy czy choćby pogoda. Mimo swojej pierwotnej nazwy — *philosophia naturalis* — fizyka pozostawiła biologii opisywanie przyrody ożywionej. Biologia wydaje się obecnie przypominać nieco fizykę sprzed czasów Newtona — jest w znacznie większym stopniu gromadzeniem faktów niż znajomością zasad działania badanych obiektów. Oczywiście wynika to z tego, że obiekty biologiczne (choćby najprostsze) są nieporównywalnie bardziej niedostępne naszym umysłom niż najbardziej wymyślne wytwory inżynierii.

Choć wydaje się nam, że pewne teorie (jak na przykład równania Maxwella lub szerzej — elektrodynamika kwantowa [12]) opisują przyrodę, w zakresie ich stosowalności (który

to jednak zakres wydaje się zawierać w sobie wszystko, co moglibyśmy stworzyć lub obserwować na Ziemi), w sposób dokładny, to z praktycznych powodów nie jesteśmy w stanie użyć ich do opisu innych niż najprostsze obiektów. Dzięki fizyce tworzymy urządzenia niewystępujące wcześniej w przyrodzie, ale tworzymy je z tego, co miłe i dostępne naszym umysłom: kół, kul, prostopadłościanów, walców, prętów itp. lub rzeczy będących niedużą ich modyfikacją. Dobrze to widać w nanotechnologii półprzewodnikowej, która stara się tworzyć obiekty zbudowane z prostopadłościanów, ewentualnie powycinanych możliwie regularnymi kształtami. Przy tak ukierunkowanym projektowaniu odchylenia od jednorodności na ogół pogarszają działanie urządzeń, toteż na przykład kryształy, którymi się posługujemy, są na ogół monokryształami, a pojawiające się w nich dyslokacje są złem, którego trzeba unikać. O tym, że nie musi to być optymalna droga świadczy konstrukcja istot żywych, w których rzadko znajduje się choćby kształty regularne, a które zawierają „urządzenia” (organy, tkanki czy nawet pojedyncze komórki), których często sami nie potrafimy wytworzyć. Nawet przy rozpatrywaniu ich w najbanalniejszym sensie — choćby jako reaktory tworzące pewne związki chemiczne.

W moich pracach zajmowałem się pewną klasą wytworów nanotechnologii — mianowicie współczesnymi laserami półprzewodnikowymi. Są to urządzenia na tyle proste (w sensie opisanym wyżej), że można je skutecznie modelować, to znaczy przewidzieć lub odtworzyć, na ogół nawet ilościowo (oczywiście przy pewnej dozie tolerancji), ich charakterystyki. Z drugiej strony takie modelowanie wymaga połączenia ze sobą w sposób współzależny modeli bardzo różnorodnych zjawisk fizycznych:

1. przepływu prądu i dyfuzji nośników
2. rozptywu ciepła
3. propagacji fali elektromagnetycznej
4. zachowania nośników ładunku w studniach kwantowych, kropkach kwantowych, supersieciach itd.

Teorie dwóch pierwszych zjawisk powstały w XIX wieku i, z wyjątkiem pewnych obszarów laserów półprzewodnikowych, w których zjawiska kwantowe zaczynają psuć ich dokładność, nadal są stosowane. Równania Maxwella, opisujące zachowanie fali elektromagnetycznej, też pochodzą z XIX wieku, ale ich status jest dość wyjątkowy. Ich słuszność nie została dotąd podważona doświadczalnie, a sama teoria Maxwella dała początek choćby teorii względności. Z kolei zachowanie elektronów w ciele stałym i ich oddziaływanie z polem elektromagnetycznym może być opisane wyłącznie za pomocą mechaniki kwantowej — teorii XX-wiecznej. Niestety w tym przypadku musimy w obliczeniach uciekać się do wielu, często grubych, przybliżeń. Nawet w wyidealizowanych ciałach stałych, czyli idealnych monokryształach, dokładny kwantowy opis jest z praktycznych powodów niemożliwy. W strukturach laserowych oddalamy się nieco od tego ideału tworząc heterostruktury (struktury zbudowane z połączenia różnych półprzewodników), co wymaga zastosowania w teorii kolejnych przybliżeń. Z jednej strony utrudnia to uzyskanie dokładnych wyników, z drugiej wielość danych eksperymentalnych, wynikających z intensywnego rozwoju tych urządzeń (napędzanego wielkim zapotrzebowaniem na nie) pozwala na weryfikacje stosowalności takich przybliżeń. Dodatkowo technologia laserów półprzewodnikowych jest blisko spokrewniona z eksperymentami dotyczącymi najgłębszych fundamentów fizyki,

takich jak emitery pojedynczych fotonów, stanów splątanych czy wytwarzanie polarytonowego kondensatu Bosego-Einsteina.

Osobnym problemem, nie fizycznym, ale matematycznym, jest praktyczne wykonywanie obliczeń związanych z modelowaniem. Są to w większości obliczenia numeryczne, które generują problemy sobie właściwe, takie jak zbieżność czy dokładność. Są one dostępne, ponieważ potrafią generować błędy trudne do wykrycia, a mogące oznaczać, że otrzymane wyniki nie mają nic wspólnego z prawdziwymi rozwiązaniami rozważanych równań. Sytuację pogarsza fakt, że często fizycy posługujący się metodami numerycznymi nie mają wystarczającej wiedzy matematycznej, by nie wpadać w takie pułapki, a matematycy niebezpiecznie oddalili się od fizyki.

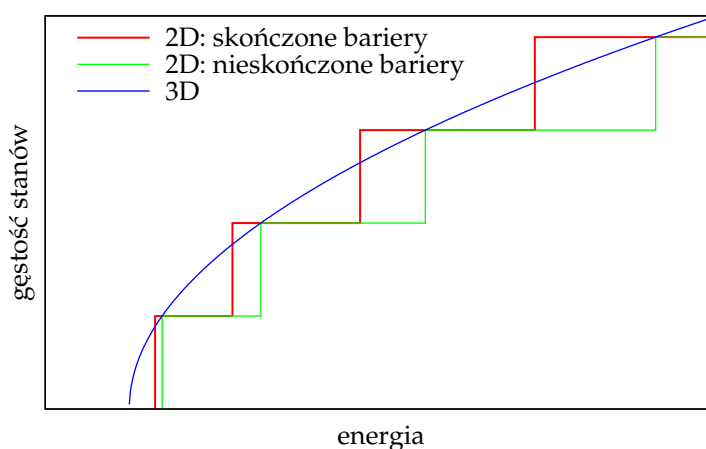
Przedstawione przeze mnie prace dotyczą opisanych powyżej zagadnień pojawiających się przy modelowaniu rzeczywistych najnowszych laserów półprzewodnikowych. Prezentuję prace mówiące o obliczeniach kwantowomechanicznych w różnych typach heterostruktur (studniach kwantowych, kropkach kwantowych i supersieciach); przedstawiam algorytmy używane do wykonywania rzeczywistych obliczeń numerycznych wraz z dyskusją ich zbieżności. Przy tym pokazuję zrealizowane w praktyce lub mające być zrealizowane w najbliższej przyszłości konstrukcje, z których powstaniem jestem w jakimś stopniu związany. Są to lasery bardzo różnorodnych typów: pompowane zarówno elektrycznie jak i optycznie; o emisji z krawędzi (ang. *edge emitting lasers, EEL*) i powierzchniowej (ang. *vertical cavity surface emitting lasers, VCSELs* oraz, z zewnętrzną wnęką optyczną, *vertical external cavity surface emitting lasers, VECSELs*); lasery złączone (ang. *laser diodes, LD*) jak i lasery kaskadowe (ang. *quantum cascade laser, QCL*). Oczywiście szczegóły modeli używanych do tak różnych konstrukcji istotnie się zmieniają, ale przy ogólniejszym spojrzeniu fizyka jest jedna, i wiele elementów jest wymiennych.

Moje prace dotyczące modelowania laserów półprzewodnikowych są częścią działalności Zespołu Fotoniki Instytutu Fizyki Politechniki Łódzkiej, kierowanego przez prof. Włodzimierza Nakwaskiego. Nie powstałyby bez składowych ogólnego modelu opracowanych i połączonych w całość przez kolegów z zespołu oraz ich pomocy i inspiracji. Współpraca naszego zespołu z ośrodkami technologicznymi: Instytutem Technologii Elektronowej w Warszawie i Laboratory of Physics of Nanostructures w École polytechnique fédérale de Lausanne nie tylko przyczyniła się do powstania wielu z omawianych prac, ale również pozwoliła mi na zdobycie doświadczenia w pracy eksperymentalnej, które niezwykle mi się przydaje.

## 2. Tunelowanie nośników w strukturze wielokrotnych studni kwantowych [1]

W 1962 roku ukazały się trzy pierwsze, niezależne, doniesienia o skonstruowaniu lasera półprzewodnikowego [13–15]. Lasery te, których obszar czynny był zwykłym złączem p-n, pracowały impulsowo w temperaturze ciekłego azotu zasilane prądami o gęstościach przekraczających  $10^4$  A/cm<sup>2</sup>. Wady te wynikały z braku ograniczenia optycznego dla modu i ograniczenia dla elektronów i dziur. Szybko pojawiła się idea stworzenia podwójnej heterostruktury (ang. *double heterostructure, DHS*), w której obszar (będący jednocześnie falowodem i obszarem czynnym) o mniejszej przerwie energetycznej (jednocześnie większym współczynniku załamania) jest z dwóch stron otoczony materiałem o większej przerwie. W ten sposób ogranicza się jednocześnie ucieczkę nośników oraz mod promieniowania.

Pierwszy laser emitujący ciągle promieniowanie w temperaturze pokojowej, zasilany prądem o gęstości około  $2000 \text{ A/cm}^2$ , powstał w 1970 roku [16]. Kolejnym krokiem naprzód było rozdzielenie ograniczenia optycznego (którego minimalna szerokość związana jest z długością fali) i ograniczenia dla nośników, które z kolei chcielibyśmy mieć wąskie, aby zwiększyć gęstość nośników. Takie konstrukcje zostały nazwane *separate confinement heterostructure, SCH*. Kiedy szerokość obszaru czynnego, czyli materiału o najniższej przerwie energetycznej, będzie rzędu nanometrów, zaczynają być istotne efekty kwantowe — bardzo korzystne w tym przypadku. Gęstość stanów nośników w materiale objętościowym jest proporcjonalna do pierwiastka z energii (kinetycznej). Oznacza to, że gęstość nośników tworzących inwersję obsadzeń — czyli tych o najniższej energii — jest bardzo mała, bo  $\sqrt{E} \rightarrow 0$  dla  $E \rightarrow 0$ , co widać na rysunku 1. Gdy ograniczy się ruch nośników w jednym



Rysunek 1. Dwu- i trójwymiarowe gęstości stanów. W rzeczywistych strukturach laserów ze studniami kwantowymi studnie nie mogą być uważane za nieskończone.

wymiarze do kilku nanometrów, wprowadzi się kwantyzację pędu w tym kierunku, a tym samym minimalna energia kinetyczna staje się większa od 0, a gęstość nośników o minimalnej energii staje się duża w porównaniu z materiałem objętościowym (rysunek 1). Takie struktury nazywa się studniami kwantowymi (ang. *quantum well, QW*). Lasery ze studniami kwantowymi pojawiły się w drugiej połowie lat siedemdziesiątych [17] i pozwoliły na uzyskiwanie gęstości prądów progowych rzędu  $100 \text{ A/cm}^2$ . Wadą zwięzania obszaru czynnego jest zmniejszenie obszaru, w którym promieniowanie jest wzmacniane. Ma to szczególne znaczenie w laserach z pionowym rezonatorem, czyli takich, gdzie emisja następuje w kierunku prostopadłym do warstw epitaksjalnych. Jeśli wzmocnienie uzyskiwane z pojedynczej studni okazuje się z tego powodu niewystarczające, tworzy się tak zwane wielokrotne studnie kwantowe (ang. *multiple quantum well, MQW*), czyli kilka studni kwantowych rozdzielonych cienkimi barierami. Bariery muszą być na tyle cienkie, aby wszystkie studnie mieściły się w pobliżu strzałki fali stojącej w przypadku laserów o emisji powierzchniowej lub w pobliżu maksimum poprzecznego rozkładu modu w przypadku laserów o emisji krańcowej. Z drugiej strony zbyt cienkie bariery spowodują, że studnie będą ze sobą mocno oddziaływać zmniejszając korzyści płynące z przestrzennego ograniczenia nośników. W strukturach z wielokrotnymi studniami kwantowymi pojawia się kwestia przestrzen-

nej równomierności obsadzenia poziomów energetycznych w studniach. Gdyby studnie stanowiły układ izolowany o dobrze określonej temperaturze, problem by nie istniał, bo układ jako całość ma określone dozwolone stany, a gaz elektronowy (lub dziurowy) obsadzałby je w sposób określony przez rozkład Fermiego-Diraca. W szczególności w układzie identycznych studni kwantowych rozkład przestrzenny nośników będzie symetryczny.

W układzie, do którego jednocześnie dopływają nośniki i z którego znikają, może pojawić się w jakimś stopniu lokalizacja nośników. Przeciwdziałać jej będzie z jednej strony dekoherencja, z drugiej strony stan zlokalizowany nie jest stabilny, to znaczy cząstka będzie tunelowała między studniami. Celem tej pracy było oszacowanie czasu potrzebnego na przetunelowanie nośnika z jednego końca układu na przeciwny dla przypadku układu jednakowych studni, typowego dla laserów półprzewodnikowych, a następnie porównanie go z czasem życia nośników w laserze. Pozwala to ocenić, czy fakt, że elektrony i dziury są wstrzykiwane do obszaru aktywnego z różnych stron, może mieć negatywny wpływ na sprawność generacji promieniowania.

Najogólniejszym sposobem opisu stanu kwantowego jest formalizm macierzy gęstości. Zapisując ją dla układu identycznych studni kwantowych i rozwiązując problem jej ewolucji czasowej, otrzymujemy następujący wzór na wartość oczekiwaną położenia cząstki w funkcji czasu:

$$\langle \hat{z} \rangle(t) = \sum_{n < m} a_{nm} \cos(\omega_{nm}t) \quad (1)$$

$$\omega_{nm} = \frac{E_m - E_n}{\hbar} \quad (2)$$

gdzie  $E_i$  jest  $i$ -tym (liczonym od najniższego) poziomem energetycznym (jednowymiarowe równanie Schrödingera ma stany związane niezdegenerowane, więc  $\omega_{nm} \neq 0$ ), zaś  $a_{nm}$  są pewnymi współczynnikami. Czas tunelowania  $\tau_t$  można oszacować przez czas, po którym najwolniej zmienny składnik zmieni znak na przeciwny:

$$\tau_t \leq \frac{\pi\hbar}{\min_{n < m}(E_m - E_n)} \quad (3)$$

Potrzebną minimalną różnicę między poziomami można oczywiście obliczyć numerycznie, skoro i tak znalezienie poziomów nawet w pojedynczej studni wymaga obliczeń numerycznych. Niemniej jednak pewne dość dokładne oszacowania daje się wykonać analitycznie, a dzięki temu zauważyć, jakie parametry są dla tego procesu najistotniejsze i ocenić ich wpływ ilościowo.

Poziomy energetyczne hamiltonianu opisującego układ składający się ze studni potencjału rozdzielonych barierami są miejscami zerowymi wyznacznika pewnej macierzy, której wyrazy zależą od energii. Jest macierz układu równań liniowych opisującego odpowiednie sklepanie rozwiązań analitycznych w poszczególnych warstwach, nie zaś macierzowa reprezentacja operatora w jakiejś bazie. Dzięki temu, że taka macierz dla układu  $n$  studni zawiera na swojej przekątnej bloki z macierzy jednostudniowej i nieliczne niezerowe elementy poza tym, udało mi się znaleźć rekurencyjny wzór, pozwalający policzyć ten wyznacznik dla dowolnej liczby identycznych studni oddzielonych identycznymi barierami. W rezultacie otrzymujemy funkcję energii  $W_n(\mathcal{E})$ , która jest wielomianem  $n$ -tego stopnia ( $n$  to liczba studni) ze względu na  $W_1(\mathcal{E})$  (czyli wyznacznik macierzy dla pojedynczej studni),

którego współczynniki są także funkcjami energii. Pozwala to znaleźć przybliżone rozwiązania równania  $W_n(\mathcal{E}) = 0$  jako poprawki do rozwiązań równania  $W_1(\mathcal{E}) = 0$ , czyli do poziomów energetycznych w pojedynczej studni. Porównanie uzyskanych w ten sposób przybliżonych poziomów energetycznych z dokładnymi (numerycznymi) rozwiązaniami dla układu dwóch i czterech studni pokazało bardzo dobrą zgodność energii poziomów, ale już w przypadku czterech studni odległości między poziomami różniły się o prawie 10%. Wynika to z tego, że owe różnice są bardzo małe w porównaniu z energiami poziomów, i nawet mały błąd względny w energiach poziomów może generować duży błąd w ich różnicach.

Uzyskane w ten sposób wyniki pozwalają otrzymać ciekawe analityczne zależności. Na przykład dla studni, w których odległość poziomu podstawowego od dna w pojedynczej studni ( $\delta E$ ) jest mała w porównaniu z głębokością studni ( $U_0$ ) odległość między najbliższymi poziomami w układzie dwu- i czterostudniowym będzie proporcjonalna do wyrażenia:

$$\delta E \exp\left(-2d \frac{\sqrt{2m_b(U_0 - \delta E)}}{\hbar}\right) \quad (4)$$

gdzie  $2d$  jest szerokością bariery, a  $m_b$  masą nośnika w barierze. Odległość ta dla układu czterech studni jest w przybliżeniu dwa razy mniejsza niż dla dwóch studni, ale w rzeczywistości jest zmniejszona w nieco większym stopniu.

Szacowanie czasu tunelowania za pomocą wzoru (3) dla elektronu w układzie dwóch i czterech studni o szerokości  $60 \text{ \AA}$  rozdzielonych barierami o szerokości  $70 \text{ \AA}$ , mających pozostałe parametry zbliżone do materiałów arsenkowych, pokazało, że jest on poniżej 1 ps. Dla czterech studni ten czas jest nieco ponad dwa razy dłuższy niż dla dwóch studni, co jest zgodne z intuicyjnymi przewidywaniami. Należy zwrócić uwagę, że jest to najdłuższy czas tunelowania, odpowiadający nośnikom o najniższej energii. Nośniki z wyższych poziomów tunelują znacznie szybciej.

### 3. Model nadprogowy [2, 3]

Modelowanie laserów może służyć optymalizacji konstrukcji z punktu widzenia różnych jej parametrów. Naturalnie podstawowym wymogiem jest to, żeby laser w ogóle zaświecił, czyli osiągnięcie progu akcji laserowej. Zazwyczaj pożądanym jest, by próg pracy lasera (podawany zazwyczaj jako prąd progowy) był jak najniższy. Modelowanie progu pracy lasera nie pozwala jednak na precyzyjne określenie takich ważnych parametrów jak sprawność, moc maksymalna, liczba modów świecących jednocześnie itd. Model opisujący pracę lasera ponad progiem, pozwalający policzyć zależność mocy emitowanej od prądu (ogólnie — mocy dostarczonej do lasera) nazywa się modelem nadprogowym.

Model nadprogowy lasera wymaga przede wszystkim uwzględnienia emisji wymuszonej jako dodatkowego źródła strat nośników w obszarze czynnym. Straty nośników spowodowane przez emisję wymuszoną są proporcjonalne do iloczynu natężenia fali i wzmocnienia, przez co wprowadzają silnie nieliniowy (jako funkcja koncentracji) składnik do równania dyfuzji. Może to powodować problemy ze zbieżnością metod numerycznych użytych do rozwiązania tego zagadnienia.



Najpierw przeanalizowałem problem zbieżności równania dyfuzji w przypadku podprogowym. Ma ono postać:

$$\kappa\Delta u(\mathbf{r}) - (Au(\mathbf{r}) + Bu^2(\mathbf{r}) + Cu^3(\mathbf{r})) + \frac{j_{\perp}(\mathbf{r})}{ed} = 0 \quad (5)$$

gdzie  $u$  oznacza koncentrację nośników,  $\mathbf{r}$  jest położeniem w płaszczyźnie obszaru czynnego,  $u$  koncentracją nośników,  $A, B, C$  stałymi rekombinacji (mogącymi zależeć od  $\mathbf{r}$ ),  $j_{\perp}$  składową gęstości prądu prostopadłą do płaszczyzny obszaru czynnego,  $e$  ładunkiem elementarnym i  $d$  — grubością obszaru czynnego. Równanie to opisuje, jak nośniki wstrzykiwane do studni kwantowej przez prąd rozprzyskują się i rekombinują w płaszczyźnie studni. Współczynnik  $A$  opisuje szybkość rekombinacji monomolekularnej (na przykład rekombinacji na defektach itp.),  $B$  rekombinacji bimolekularnej (na przykład emisji spontanicznej), zaś  $C$  opisuje rekombinację Auger. Rozwiązanie tego równania opisuje nam rozkład koncentracji nośników w obszarze czynnym, a to pozwala na obliczenie rozkładu wzmocnienia optycznego.

Metody numeryczne takie jak metoda elementów skończonych dobrze radzą sobie z liniowymi równaniami różniczkowymi, dlatego rozwiązanie (przybliżone — jak prawie każde rozwiązanie numeryczne) równania nieliniowego można otrzymać poprzez iteracyjne rozwiązywanie odpowiednio zlinearyzowanych równań. W przypadku podprogowym problemem są jedynie składniki  $Bu^2$  i  $Cu^3$ . Po przybliżeniu ich liniowym wzorem Taylora ze względu na  $u$  w punkcie  $u_0$  będącym wartością koncentracji z poprzedniej iteracji (czyli prostą styczną do wielomianu  $Bu^2 + Cu^3$ ) otrzymujemy równanie:

$$\kappa\Delta u - (u - u_0)\frac{\partial L}{\partial u}(u_0) - L(u_0) + \frac{j_{\perp}}{ed} = 0 \quad (6)$$

gdzie

$$L(u) = Au + Bu^2 + Cu^3 \quad (7)$$

jest funkcją opisującą straty nośników. Po policzeniu prostej pochodnej dla strat podprogowych postaci (7) otrzymujemy następujący wzór:

$$\kappa\Delta u - (A + 2Bu_0 + 3Cu_0^2)u + \frac{j_{\perp}}{ed} + Bu_0^2 + 2Cu_0^3 = 0 \quad (8)$$

Dla poprawienia czytelności pominąłem w zapisie zależności od  $\mathbf{r}$ . Żeby udowodnić zbieżność tej metody odejmuję stronami równania dla sąsiednich iteracji. Używając twierdzeń o wartości średniej otrzymujemy następujące równanie na  $\delta_i$  — zmianę koncentracji między kolejnymi iteracjami

$$\delta_i = -(u_i - u_{i-1}) \quad (9)$$

$$\kappa\Delta\delta_i - \delta_i\frac{\partial L}{\partial u}(u_{i-1}) + q_i\delta_{i-1}^2\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}(\mu_i) = 0 \quad (10)$$

gdzie  $q_i$  jest pewną funkcją przyjmującą wartości z przedziału  $(0, 1)$ , a  $\mu_i$  funkcją przyjmującą wartości pomiędzy  $u_{i-1}$  a  $u_{i-2}$ . Dla strat podprogowych równanie (10) wygląda następująco:

$$\kappa\Delta\delta_i - \delta_i(A + 2Bu_{i-1} + 3Cu_{i-1}^2) + q_i\delta_{i-1}^2(2B + 6C\mu_i) = 0 \quad (11)$$

Formalnie jest to równanie (ze względu na  $\delta_i$ ) dyfuzji ze stratami proporcjonalnymi do  $\delta_i$  (współczynnik proporcjonalności jest dodatni, ponieważ koncentracja  $u_{i-1}$  jest nieujemna) i nieujemnymi źródłami niezależnymi od  $\delta_i$ . Oznacza to, że funkcja  $\delta_i$  jest nieujemna, czyli, zgodnie z definicją (9), ciąg koncentracji  $u_i$  jest nierosnący (dla  $i \geq 2$ ). Z drugiej strony ciąg koncentracji jest z dołu ograniczony przez 0 (bo koncentracja nie może być ujemna), czyli musi być zbieżny.

Dla przypadku pracy nadprogowej należy uwzględnić dodatkowo starty nośników związane z emisją wymuszoną. Do strat podprogowych  $L$  opisanych wzorem (7) należy dodać, w przypadku pracy jednomodowej, odpowiedni składnik, otrzymując w ten sposób funkcję  $L_{ot}$  opisującą nadprogową rekombinację nośników:

$$L_{ot}(\mathbf{r}) = L(\mathbf{r}) + P \frac{2gM(\mathbf{r})}{(1-R)\hbar\omega \int_S M} \quad (12)$$

gdzie  $P$  jest mocą emitowaną przez laser,  $R$  odbijalnością zwierciadła, przez które następuje emisja (przy założeniu, że drugie zwierciadło ma odbijalność 100%),  $M(\mathbf{r}) / \int_S M$  unormowanym poprzecznym rozkładem modu, a  $\hbar\omega$  energią fotonu. Znalezienie poszukiwanej mocy  $P$  dla danego napięcia  $U$  (ponad progiem) polega na rozwiązaniu układu równań, który stanowią: równanie dyfuzji i model optyczny, mówiący, kiedy wzmocnienie w obszarze czynnym pokrywa wszystkie straty promieniowania.

Rozważania prowadzące do wzoru (10) są w przypadku nadprogowym dokładnie takie same. Podobnie jak w przypadku progowej funkcja  $\partial L / \partial u$  jest dodatnia, więc warunkiem wystarczającym zbieżności jest dodatniość drugiej pochodnej:  $\partial^2 L / \partial u^2$ . Niestety funkcja  $\partial^2 g / \partial u^2$  jest ujemna, więc dla dużych mocy ów warunek dostateczny może nie być spełniony.

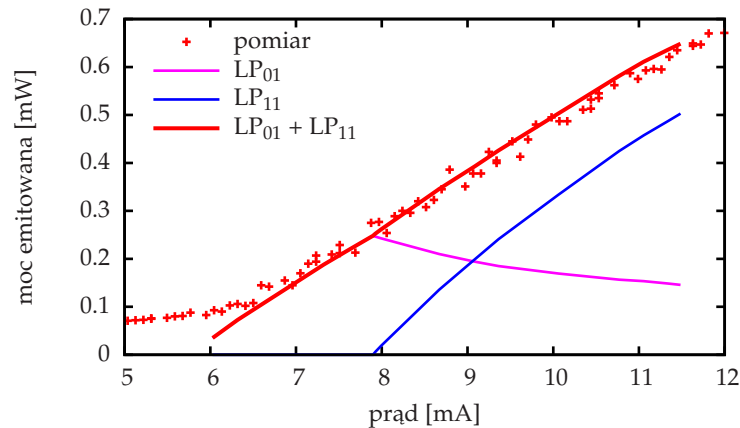
W przypadku pracy wielomodowej wzór (12) modyfikuje się, dodając oddziaływanie kolejnych modów poprzecznych, następująco:

$$L_{ot} = L + \sum_i P_i \frac{2g_i M_i}{(1-R_i)\hbar\omega_i \int_S M_i} \quad (13)$$

gdzie indeks  $i$  numeruje laserujące mody. Dodatkowymi równaniami pozwalającymi znaleźć wartości szukanych mocy  $P_i$  są warunki zerowania się wzmocnień modowych każdego z modów.

Zaprezentowany model nie wymaga użycia w części nadprogowej żadnych dodatkowych, w stosunku do wersji progowej, parametrów. Rysunek 2 przedstawia wyniki modelowania nadprogowego oraz charakterystykę eksperymentalną lasera VCSEL opisanego w pracy [18]. Widać na nim bardzo dobrą zgodność obliczeń z eksperymentem, a także wygaszanie modu podstawowego ( $LP_{01}$ ) przez pierwszy wzbudzony mod wyższego rzędu ( $LP_{11}$ ).

Rozważania tu przedstawione, opublikowane w pracy [2], stały się częścią modelu laserów półprzewodnikowych rozwijanego w naszym zespole i wykorzystane do modelowania wielu konstrukcji laserowych w zakresie wcześniej niedostępnym naszym modelom.



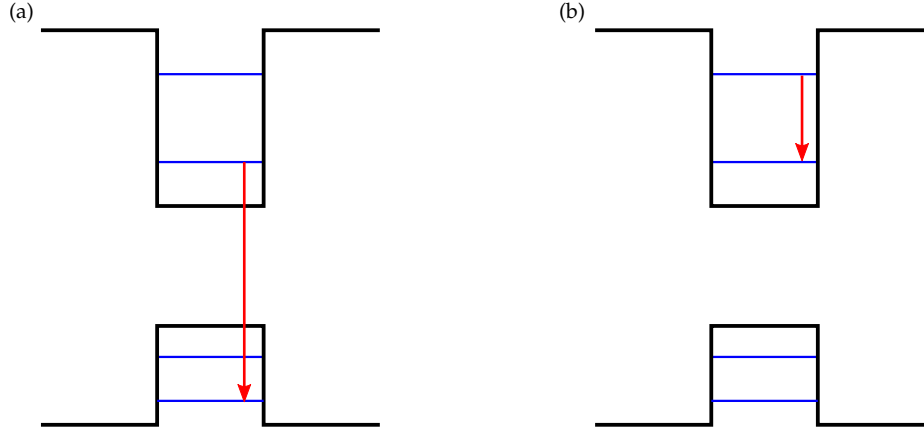
Rysunek 2. Obliczona i zmierzona charakterystyka nadprogowa lasera VCSEL [18]. Linie opisane jako LP<sub>01</sub> i LP<sub>11</sub> opisują moce emitowane w odpowiednich modach poprzecznych lasera.

#### 4. Lasery kaskadowe i supersieci [4, 5]

Lasery kaskadowe (ang. *quantum cascade laser*, QCL) są niezłączowymi półprzewodnikowymi laserami mogącymi emitować fale z zakresu średniej i dalekiej podczerwieni, w którym brakuje małych i wydajnych emiterów. Twórcy pierwszego lasera kaskadowego, pracujący wówczas w Bell Laboratories firmy AT&T, opublikowali swoje osiągnięcia w kilku artykułach w 1994 r. [19–22]. Pierwszy laser powstał na podłożu InP, a jego obszar czynny składał się ze studni i barier w układzie InGaAs/InAlAs. Bardzo ważną zaletą takiego układu jest fakt, że podłoże z InP, mające niższy współczynnik załamania niż obszar czynny, który dzięki temu stanowi naturalny falowód. Dla laserów kaskadowych z obszarem aktywnym AlGaAs/GaAs na podłożu z GaAs, gdzie obszar czynny ma mniejszy współczynnik załamania, podłoże musi być izolowane optycznie od obszaru czynnego, co stanowi istotny problem [23]. Niemniej takie lasery pojawiły się kilka lat później [24, 25], a w Polsce są wytwarzane w Instytucie Technologii Elektronowej w Warszawie od 2009 roku [26].

W laserach kaskadowych przejścia promieniste zachodzą pomiędzy stanami w obrębie jednego pasma (w praktyce pasma przewodnictwa). Rysunek 3 pokazuje schematycznie różnice pomiędzy przejściami między- i wewnątrzpasemowymi. W układzie pojedynczej studni pokazanym na tym rysunku nie jest możliwe uzyskanie inwersji obsadzeń. Odpowiedni układ stanów kwantowych uzyskuje się tworząc supersieć, czyli periodyczny układ cienkich barier i studni kwantowych, i polaryzując ją odpowiednim polem elektrycznym. W każdym okresie supersieci występuje obszar, w którym występują poziomy energetyczne tworzące układ, w którym może powstać inwersja obsadzeń oraz obszar odpowiedzialny za transport elektronów z obszaru laserującego do następnego okresu supersieci (rysunek 4). W ten sposób tworzy się kaskada elektronów emitujących fotony, którym ta konstrukcja zawdzięcza swoją nazwę. Układ poziomów energetycznych oraz kształty funkcji falowych muszą być tak dobrane, żeby pewnym poziomom umożliwić szybką relaksację niepromienistą i transport nośników przez nie, inne z kolei muszą preferować relaksację promienistą.

Do znajdowania stanów elektronowych w takiej supersieci użyłem przybliżenia funk-



Rysunek 3. Przejścia, oznaczone czerwonymi strzałkami: międzypasmowe (a) i wewnątrzpasmowe (b) pomiędzy stanami w studniach kwantowych.

cji obwiedni. Jest ono powszechnie używane w tych zastosowaniach, mimo że grubości warstw są w tych przypadkach pojedynczymi monowarstwami atomowymi, a metoda ta zakłada, że funkcja obwiedni jest prawie stała na dystansie odległości międzyatomowych. Niemniej jednak w praktyce okazuje się, że jej przewidywania bardzo dobrze zgadzają się z rzeczywistością, a obliczenia stają się względnie proste — to znaczy jednowymiarowe.

Znalezienie funkcji obwiedni oznacza rozwiązanie równania Schrödingera dla kawałka liniowego potencjału, takiego jak na rysunku 5 z masami efektywnymi elektronu. Żeby uniknąć problemów związanych ze stanami niezwiązanymi, umieszcza się nieskończoną barierę potencjału za właściwą strukturą supersieci. Dodatkowo należy uwzględnić skokową zmienność tych mas między warstwami. Na złączeniach mają być spełnione następujące warunki (nazywane warunkami Ben Daniela-Duke'a):

$$\lim_{z \rightarrow a^-} \Psi_i(z) = \lim_{z \rightarrow a^+} \Psi_{i+1}(z) \quad (14)$$

$$\lim_{z \rightarrow a^-} \frac{1}{m_i^*} \Psi_i'(z) = \lim_{z \rightarrow a^+} \frac{1}{m_{i+1}^*} \Psi_{i+1}'(z) \quad (15)$$

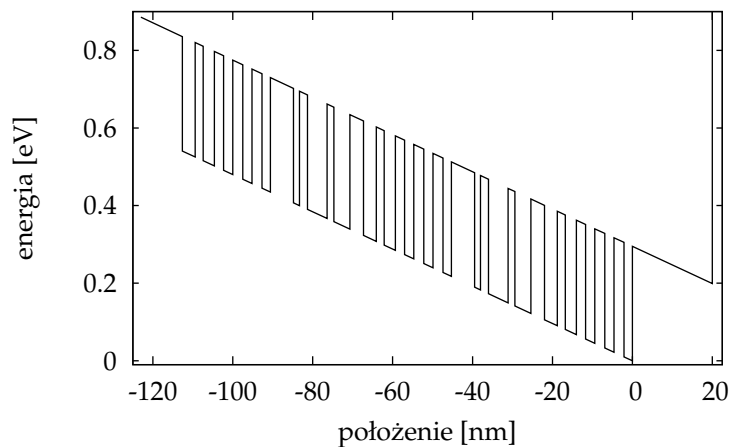
gdzie  $a$  jest punktem styku warstw,  $\Psi_i$  funkcją obwiedni w  $i$ -tej warstwie,  $m_i^*$  — masą efektywną w  $i$ -tej warstwie. Rozwiązania analityczne równania Schrödingera dla potencjału stałego pola elektrycznego (czyli rozwiązania w warstwach dla naszego problemu) postaci  $U(z) = eFz - U_0$  są znane i są kombinacjami liniowymi funkcji Airy'ego  $Ai$  oraz  $Bi$ :

$$\Phi(z) = AAi(k(Z_0 - z)) + BBi(k(Z_0 - z)) \quad (16)$$

$$k = \sqrt[3]{-\frac{2meF}{\hbar^2}} \quad Z_0 = \frac{\mathcal{E} - U_0}{eF} \quad (17)$$

gdzie  $\mathcal{E}$  jest energią własną i  $e < 0$  jest ładunkiem elektronu. Znalezienie poziomów energetycznych i funkcji falowych (dokładniej — funkcji obwiedni) dla potencjału z rysunku 5 polega na sklejeniu rozwiązań (16) między warstwami za pomocą warunków (14) i (15) i z uwzględnieniem warunków brzegowych. Niezerowe rozwiązania tego zagadnienia są





Rysunek 5. Przykładowy potencjał używany w obliczeniach. Odpowiada on 2,5 okresom supersieci spolaryzowanej polem  $48 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$ . Nieskończona bariera umieszczona jest 20 nm od końca supersieci.

w którym macierze  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  są unitarne, czyli w szczególności nieosobliwe, a macierz  $\mathbf{\Sigma}$  jest diagonalna i rzeczywista. Dzięki temu szukanie dozwolonych energii polega na szukaniu zer na przekątnej macierzy. Bardzo ważną zaletą podejścia polegającego na sklejanu rozwiązań analitycznych (co nie jest jedynym możliwym sposobem) jest możliwość wprowadzenia zależności masy efektywnej od energii  $\mathcal{E}$  — czyli możliwość łatwego uwzględnienia tak zwanej nieparaboliczności pasma. Przy uwzględnieniu tego zjawiska problem nie daje się sformułować jako zagadnienie szukania wartości własnych operatora liniowego, dlatego sposoby rozwiązywania oparte na dyskretyzacji i szukaniu wartości własnych tak powstałych macierzy mają problemy z uwzględnieniem tego efektu.

Bardzo istotną kwestią jest znalezienie wszystkich dozwolonych energii w zadanym zakresie. Zawsze w przypadku numerycznego rozwiązywania równań o wielu rozwiązaniach jest to zasadniczy problem. W tym przypadku dużym ułatwieniem jest fakt, że stany są niezdegenerowane (jako stany związane jednowymiarowego równania Schrödingera), a liczba miejsc zerowych  $l$ -tej funkcji falowej wynosi  $l$ , jeśli funkcje numeruje się od zera od najniższej energii. Dzięki temu wiadomo, czy w przedziale między znalezionymi już rozwiązaniami należy jeszcze szukać kolejnych. W praktyce posłużenie się tym sposobem znakomicie przyspiesza szukanie rozwiązań, zwłaszcza że liczbę miejsc zerowych funkcji falowej w każdej warstwie łatwo wyznaczyć, bez przeszukiwania jej wartości wewnątrz tego przedziału, znając wartość  $k$  ze wzoru (17) i sprawdzając znaki funkcji na granicach warstwy.

#### 4.1. Zastosowania modelu

W ramach Projektu Badawczego Zamawianego „Zaawansowane technologie dla półprzewodnikowej optoelektroniki podczerwieni” wykonane zostały, w Instytucie Technologii Elektronowej, lasery kaskadowe z materiałów arsenkowych. Wykonanie samych laserów poprzedziły wzrosty, pomiary i obliczenia struktur testowych supersieci. Każda testowa supersieć była wielokrotnym powtórzeniem identycznych par studnia-bariera, ponadto

nie były polaryzowane zewnętrznym polem elektrycznym. W takim przypadku tworzą się minipasma, w których poziomy energetyczne ułożone są bardzo ciasno. Jest to duże wyzwanie dla numerycznego znajdowania miejsc zerowych, gdyż błędy numeryczne w pewnym momencie mogą uniemożliwiać rozróżnienie rozwiązań leżących zbyt blisko siebie. Szczególnie trudna sytuacja jest w paśmie walencyjnym, gdzie duża masa dziur ciężkich powoduje znaczne zawężenie minipasm. Jako że ważnym pomiarem była fotoluminescencja międzypasmowa, potrzebne były obliczenia poziomów i funkcji falowych zarówno w paśmie walencyjnym jak i paśmie przewodnictwa oraz elementów macierzowych przejść optycznych między stanami.

Na szerokość minipasm najistotniejszy wpływ ma szerokość barier między studniami. Badane struktury miały bariery o grubości 46 Å i 11 Å. Obliczenia pokazują, że dla barier o szerokości 46 Å minipasma są tak wąskie, że niewiele różnią się od poziomów w pojedynczej studni. Natomiast przy barierach o szerokości 11 Å, chociaż pasmo ciężkodziurowe pozostaje względnie wąskie, minipasma elektronowe i lekkodziurowe ma szerokość około 30 meV. Powoduje to jakościową zmianę wyglądu widma fotoluminescencji, wyraźnie widoczną na zmierzonych widmach. Ponadto badania te wykazały pewne odchyłki w składach molowych i rozmiarach warstw względem projektowanych wartości. Dzięki przeprowadzonym obliczeniom udało się ustalić prawdopodobne rzeczywiste wartości tych parametrów, które znalazły jakościowe potwierdzenie w innych pomiarach.

Z widma fotoluminescencji trudno odtworzyć ilościowo parametry dotyczące wyższych poziomów energetycznych. Jest to łatwiejsze dzięki analizie widm fotoodbicia (ang. *photorefectance*, PR). Tego typu pomiary testowych supersieci zostały przeprowadzone w Instytucie Fizyki Politechniki Wrocławskiej. Interpretacja uzyskanych widm wydaje się potwierdzać ilościowo zgodność obliczeń z eksperymentem, ale należy wziąć pod uwagę niejednoznaczność interpretacji pewnych fragmentów tego widma. Bardzo ciekawym uzupełnieniem tych danych jest bezpośredni pomiar fotoluminescencji *wewnątrzpasmowej*, czyli pomiar widma fotonów powstałych na skutek przejść promienistych elektronów między minipasmami wewnątrz pasma przewodnictwa. Zgodność pomiaru energii takiego przejścia z obliczeniami jest bardzo dobra — błąd w najgorszym przypadku jest poniżej 10%.

Supersieci obszaru aktywnego lasera kaskadowego są dużo bardziej skomplikowane niż opisane testowe supersieci. Po kilku korektach procesu wzrostu struktur laserowych i ich processingu, w Instytucie Technologii Elektronowej w Warszawie, w 2009 roku, w piątek 13 lutego około godziny 13 UTC, 13. zmontowane urządzenie zaświeciło, stając się pierwszym polskim laserem kaskadowym [26].

## 5. Lasery z kropkami kwantowymi [6]

Idea wykorzystania w laserach 0-wymiarowych struktur (czyli obiektów, których rozmiary są bardzo małe we wszystkich kierunkach) pochodzi z początku lat osiemdziesiątych [27]. Pojawiła się krótko po wytworzeniu pierwszych tego typu obiektów, co miało miejsce w Związku Radzieckim w 1981 roku [28] (rosyjski oryginał), [29] (przekład angielski). Wówczas perspektywa praktycznego ich wykorzystania w laserach była bardzo odległa, ale teoria przewidywała, że takie lasery powinny charakteryzować się bardzo niskimi prądami progowymi i ich nieczułością na temperaturę. Wówczas modelem

0-wymiarowych struktur w obszarze czynnym laserów były prostopadłości (sześciiany) i dlatego nazywano je pudełkami kwantowymi (ang. *quantum box*). Pierwsze doniesienia o półprzewodnikowych laserach, których emisja pochodzi z kropek kwantowych (wtedy była już używana nazwa *quantum dot*), pojawiły się w 1994 roku [30], chociaż z powodu słabej jakości kropek było to kwestionowane [31]. Mimo dużego postępu technologicznego nadal rzeczywiste 0-wymiarowe struktury wykorzystywane w laserach półprzewodnikowych różnią się wyraźnie od wyidealizowanych pierwotnych modeli. Między innymi z tego powodu uzyskiwane rzeczywiste charakterystyki laserów zdecydowanie odbiegają od pierwszych przewidywań teoretycznych.

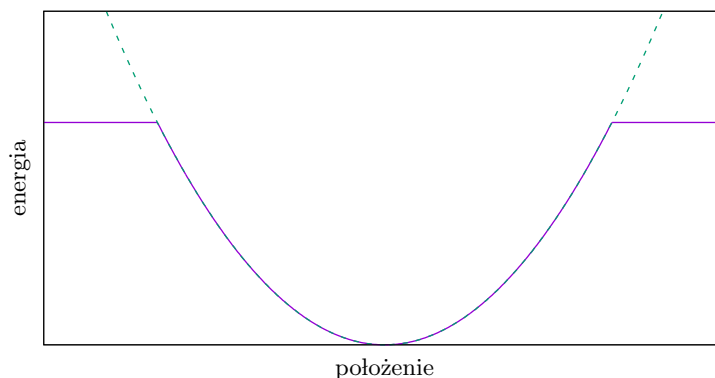
Najważniejszą cechą kropki kwantowej (generalnie potencjału ograniczonego we wszystkich kierunkach) jest występowanie dyskretnych poziomów energetycznych, podobnie jak w atomach. W przeciwieństwie do atomów dyskretno widmo poziomów występuje tylko w dość wąskim przedziale energii — poniżej poziomu bariery potencjału. Wielką zaletą kropek kwantowych, z punktu widzenia badań podstawowych, jest to, że są nieruchome i mogą być badane indywidualnie, co w przypadku swobodnych atomów jest bardzo trudne. Z punktu widzenia konstrukcji obszaru czynnego lasera dyskretno widmo oznacza, że do wytworzenia inwersji obsadzeń między pasmem przewodnictwa a pasmem walencyjnym potrzeba znacznie mniej nośników niż w przypadku studni kwantowych. Umożliwia to konstruowanie laserów o bardzo niskich prądach progowych [32–35]. Ponadto, dzięki innej technologii wzrostu, można uzyskiwać emisję w zakresie spektralnym trudno dostępnym dla studni kwantowych wytwarzanych z podobnych związków [36–38]. Wzmacniacze optyczne z kropkowymi obszarami są bardzo szybkie i mogą mieć szerokie widmo wzmocnienia [39]. Podobne cechy powodują, że nasycalne absorbery z kropkami kwantowymi mają bardzo dobre parametry [40].

Obecnie wytwarza się różne rodzaje kropek półprzewodnikowych, w zależności od zastosowań. Z jednej strony są one bardzo wygodnym obiektem do badań podstawowych jako nieruchome odpowiedniki (pod pewnymi względami) atomów, które do tego mogą być pobudzane elektrycznie. Dzięki temu są one również narzędziem badań podstawowych, dotyczących emisji pojedynczych fotonów, generacji stanów splątanych i tym podobnych doświadczeń dotyczących najgłębszych podstaw fizyki [41–44]. W takich przypadkach bada się na ogół pojedyncze kropki, ewentualnie układy kropek sprzężonych. Do wytwarzania laserów potrzeba z kolei struktur o dużej powierzchniowej gęstości kropek. Niestety obecnie używane metody ich wytwarzania powodują, że nie umiemy uzyskać warstw kropek, które jednocześnie mają dużą powierzchniową gęstość kropek a kropki mają identyczne (lub niemal identyczne) rozmiary. Z powodu statystycznego rozrzutu ich wymiarów widmo takiego układu przestaje przypominać widmo atomowe i staje się w praktyce widmem ciągłym. Z tego powodu teoretyczny opis kropki na potrzeby modelu lasera nie musi być precyzyjnym opisem pojedynczej kropki. Wystarczy by opisywał gęstość stanów uśrednioną po całym zespole kropek.

Model zakładający skokową zmianę potencjału (który tak dobrze sprawdza się w przypadku studni kwantowych), czyli stały potencjał wewnątrz kropki mniejszy niż otaczający potencjał, prowadzi do wniosku, że odległości między kolejnymi poziomami zwiększają się. Doświadczenia z samoformującymi się, na przykład w procesie Stranskiiego-Krastanowa, kropkami (czyli takimi, których najczęściej używa się w laserach) pokazały, że odległości między kolejnymi pikami fotoluminescencji są prawie jed-



nakowe [45, 46]. Z tego powodu często stosowanym przybliżeniem, popartym dokład-



Rysunek 6. Potencjał oscylatora harmonicznego (linia przerywana — parabola) i zakładany potencjał w kropce kwantowej (linia ciągła).

niejszymi rozważaniami teoretycznymi, jest przyjęcie, że poziomy w kropce opisywane są dwuwymiarowym potencjałem oscylatora harmonicznego, z uwzględnieniem przesunięcia energetycznego wynikającego z ograniczenia przestrzennego w trzecim wymiarze [47, 48]. Takie wyróżnienie w opisie jednego kierunku (kierunku wzrostu) wynika z wyraźnego spłaszczenia kropek w tym kierunku. Oczywiście potencjał w kropce nie może być nieograniczony (jak potencjał oscylatora harmonicznego), bo jest ograniczony przez potencjał bariery. Najbliższa potencjałowi harmonicznemu teoretycznie możliwa postać przedstawiona jest na rysunku 6. Rozwiązanie równania Schrödingera dla takiego potencjału jest znacznie bardziej skomplikowane niż użycie znanych analitycznych rozwiązań dla oscylatora harmonicznego. Na szczęście rachunki na konkretnych przykładach pokazały, że poprawki do wartości własnych są zanedbywalnie małe — zupełnie inaczej niż w przypadku porównania skończonej i nieskończonej studni potencjału.

Do opisu wzmocnienia w laserze potrzeba znać potencjał w pasmie przewodnictwa i pasmie walencyjnym. Znajomość odległości pików fotoluminescencji sama nie wystarcza do znalezienia parametrów obu tych potencjałów. W przybliżeniu oscylatora harmonicznego energetyczna odległość pików wynosi  $\hbar(\omega_c + \omega_v)$ , a odległości między poziomami w pasmie przewodnictwa i walencyjnym są odpowiednio równe  $\hbar\omega_c$  i  $\hbar\omega_v$ . Z pomiarów fotoluminescencji znamy sumę  $\omega_c + \omega_v$ , ale żeby poznać obie te liczby z osobna, trzeba założyć coś o potencjale. Przy założeniu, że potencjały w obu pasmach są identyczne, dostaje się zależność

$$\frac{\omega_c}{\omega_v} = \sqrt{\frac{m_v}{m_c}} \quad (20)$$

gdzie  $m_c, m_h$  są masami efektywnymi w odpowiednich pasmach. Kolejnym możliwym założeniem jest przyjęcie, że paraboliczne potencjały są zdefiniowane przez jednakową szerokość i różne głębokości ( $U_c, U_v$ ), czyli różnice między wartością w środku a poziomem bariery. W takim przypadku dostaje się nieco inną zależność:

$$\frac{\omega_c}{\omega_v} = \sqrt{\frac{m_v U_c}{m_c U_v}} \quad (21)$$

Przyjmując że głębokości potencjałów w obu pasmach podlegają tej samej zależności, co w studniach kwantowych, można przyjąć (dla materiałów arsenkowych), że  $U_c/U_v \approx 7/3$ .

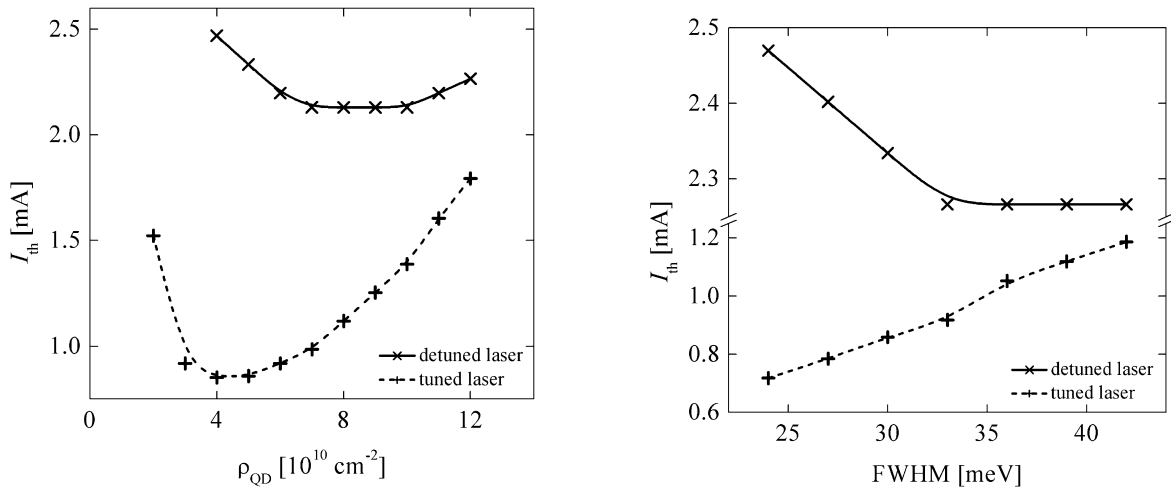
Stopień degeneracji poziomów w dwuwymiarowym potencjale harmonicznym rośnie liniowo z numerem poziomu. Oznacza to, że przy odpowiednio silnym pobudzeniu wzmocnienie przejść między wyższą parą poziomów przewyższa wzmocnienie dla przejść między poziomami podstawowymi, co ma ważne praktyczne konsekwencje, o których mowa dalej.

Statystyczne własności zespołu kropek kwantowych takie jak ich powierzchniowa gęstość i szerokość połówkowa widma (zdeteminowana przez wariancję rozkładu rozmiarów kropek) mają zasadnicze znaczenie dla właściwości laserów. Duża gęstość kropek oznacza, że można osiągnąć duże wzmocnienie, ale jednocześnie koncentracja nośników potrzebna do uzyskania przezroczystości rośnie. Podobnie duża jednorodność kropek (mała szerokość połówkowa widma) podnosi wartość wzmocnienia w pikie, ale zmniejsza tolerancję na odstrojenie emisji od tegoż pikie.

W laserach o emisji krawędziowej, w których mody podłużne są tak gęste, że długość emitowanej fali dopasowuje się do maksimum wzmocnienia, problemem (ewentualnie zjawiskiem, które można odpowiednio wykorzystać) jest opisane wyżej przełączanie się lasera na emisję na krótszej fali [49, 50]. Z tego powodu trudno jest dostać emisję o dużej mocy na długiej fali odpowiadającej przejściom podstawowym. Z drugiej strony wielką zaletą kropkowych laserów o emisji krawędziowej jest bardzo niski prąd progowy. Wzmocnienia progowe w takich laserach są niskie, a przy uzyskiwanych praktycznie gęstościach i jednorodnościach kropek wystarcza niewielki prąd by je uzyskać [32–35]. W laserach typu VCSEL (ang. *vertical cavity surface emitting laser*) potrzebne są dużo większe wzmocnienia. Niestety jednocześnie takie lasery potrzebują dość szerokiego widma wzmocnienia, gdyż ich krótki rezonator wymusza pracę na pojedynczym modzie podłużnym. Przy zmianie temperatury wywołanej wzrostem prądu pik wzmocnienia przesuwa się szybciej niż długość fali modu podłużnego. Dlatego, żeby móc osiągnąć większe moce często, tworzy się strukturę tak, by w progu laser świecił na fali nieco dłuższej niż ta, dla której przypada pik wzmocnienia. Dzięki temu przy zwiększaniu prądu w pewnym zakresie wzmocnienie emitowanej fali poprawia się. Oczywiście podnosi to prąd progowy, więc trzeba postępować ostrożnie. W przypadku laserów VCSEL zarówno gęstość powierzchniowa kropek jak i ich jednorodność mają duży, często niemonotoniczny, wpływ na parametry urządzenia (rysunek 7). W pracy [6] przedstawione są liczne zależności pokazujące ten wpływ zarówno dla laserów w progu dostrojonych i odstrojonych. W szczególności wynika z nich, że pogarszanie jednorodności kropek (czyli poszerzanie widma wzmocnienia kosztem wartości w pikie) od pewnego momentu nie podnosi progu, co widać na rysunku 7. Ten ważny wniosek może pomóc w uzyskiwaniu większych mocy z kropkowych VCSEL-i.

Wyniki i modele tutaj omówione zostały zastosowane w praktyce przy wytworzeniu laserów typu VCSEL z kropkowym obszarem czynnym [18, 51]. Ten typ lasera wymaga obszarów czynnych zapewniających wysokie wzmocnienie, co czyni użycie w tej roli kropek kwantowych szczególnie trudnym zadaniem.

Przedstawiłem w tym rozdziale zarówno istotne zalety laserów z kropkami kwantowymi, ale również poważne problemy z nimi związane. To, że kropki kwantowe nie wyparły studni kwantowych w większości zastosowań, pomimo intensywnych badań nad nimi, wynika w pewnym stopniu właśnie z tych ograniczeń kropek kwantowych.



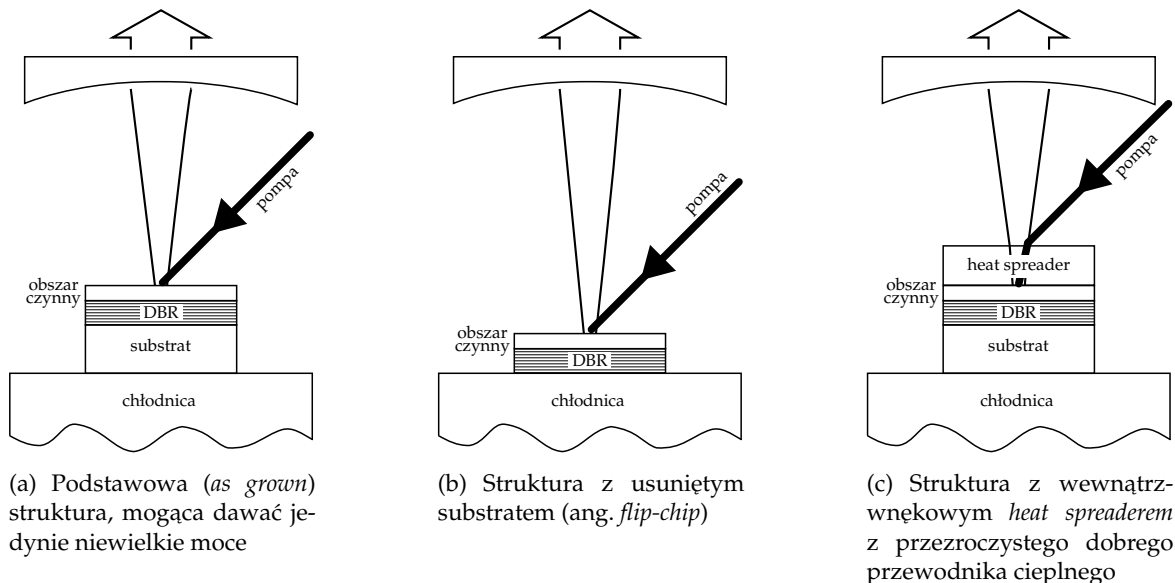
Rysunek 7. Zależność prądu progowego od gęstości kropek (lewy wykres) i jednorodności kropek (prawy wykres). Szczegóły opisane są w pracy [6].

## 6. Lasery typu VECSEL [7, 8]

Lasery półprzewodnikowe kojarzą się automatycznie z laserami pompowanymi elektrycznie. Jest to, w połączeniu z ich małymi rozmiarami i często nieosiągalnymi dla innych emiterów sprawnościami, ich chyba najistotniejsza zaleta. Jednak lasery VECSEL (ang. *vertical external cavity surface emitting laser*), nazywane również (choć jest to szersze pojęcie) laserami dyskowymi (ang. *semiconductor disc laser*) w ogromnej większości są pompowane optycznie. Schemat takiego lasera przedstawiony jest na rysunku 8. Jakże są powody rezygnacji z pompowania elektrycznego? Zwykle lasery półprzewodnikowe charakteryzują się albo dużą mocą (lasery krawędziowe), albo dobrej jakości wiązką (lasery VCSEL). Kosztem rezygnacji z pompowania elektrycznego można obie zalety połączyć. Pompowanie na ogół uzyskuje się za pomocą lasera półprzewodnikowego dużej mocy, więc można VECSEL uważać za rodzaj konwertera wiązki dużej mocy, ale słabej jakości na wiązkę bardzo dobrej jakości i mocy oczywiście mniejszej niż pompa, ale nadal dużej [52]. Nie jest to jedyne, a może i nawet nie najważniejsze ich zastosowanie. Zewnętrzną wnękę tego typu laserów można wzbogacić o, na przykład, kryształ nieliniowy lub nasycalny absorber, i dzięki znacznej gęstości mocy wewnątrz wnęki uzyskać spektakularne efekty.

Pierwsze tego typu konstrukcje zostały opublikowane na początku lat dziewięćdziesiątych [53]. Obecnie uzyskuje się z pojedynczego czipu ponad 100 W w pracy ciągłej [54]. Przy generacji drugiej harmonicznej również otrzymuje się bardzo duże, wielowatowe, moce [55, 56], często nieosiągalne dla tych długości fal za pomocą innych laserów półprzewodnikowych. Obszernie lasery VECSEL opisane są w przeglądowej pracy [57]. Nasz zespół zaangażowany jest w prace nad laserami VECSEL emitującymi w zakresie długości fal 1300–1550 nm [58], w okolicy 1  $\mu\text{m}$  [59, 60] oraz generującymi drugą harmoniczną w zakresie widzialnym [61].

Moc pompy musi być oczywiście wyraźnie większa niż moc emitowana. Sprawności laserów VECSEL mogą zbliżać się do 50% [62], ale nawet przy tak dużej sprawności ilość energii zamienianej na ciepło może być ogromna. W przypadku najprostszej struktury, po-



Rysunek 8. Schematy trzech typowych struktur lasera VECSEL. Skala ani proporcje na rysunku nie są zachowane (grubość DBR-a i obszaru czynnego to kilka mikrometrów, substrat i *heat spreader* mają grubość po kilkaset mikronów). Wnęę rezonansową tworzy zwierciadło braggowskie (DBR) i zewnętrzne wklęśłe zwierciadło.

kazanej na rysunku 8(a), ciepło musi przepływać przez cały gruby substrat. Przy założeniu, że średnica obszaru, przez który płynie ciepło, to  $200\ \mu\text{m}$  (tego rzędu średnice plamki są typowe dla VECSEL-i większej mocy) a grubość substratu (GaAs) to  $400\ \mu\text{m}$ , otrzymujemy skok temperatury na substracie o prawie  $300\ \text{K}$  na każdy wat ciepła. Oczywiście rozptyw ciepła nie odbywa się wewnątrz ściśle określonej średnicy, ale to oszacowanie nie odbiega bardzo od wyników dokładniejszych obliczeń. Oczywiście przy takich temperaturach nie ma co myśleć o zbudowaniu dobrego lasera. To proste oszacowanie pokazuje dwie możliwe drogi redukcji oporu cieplnego struktury:

1. zbliżyć jak najbardziej grzany obszar do chłodnicy
2. poszerzyć obszar, którym ciepło płynie do chłodnicy

Pierwszy pomysł łatwo (przynajmniej teoretycznie) zrealizować poprzez usunięcie (lub choćby znaczące pocienienie) substratu, jak na rysunku 8(b).

By zrealizować drugi sposób nie wystarczy powiększenie plamki pompowania, gdyż istnieje pewna progowa gęstość mocy pompy, więc w ten sposób powiększałoby się proporcjonalnie do przekroju plamki progową moc lasera, która niemal w całości zmienia się w ciepło. Na szczęście da się zwiększyć szerokość strumienia ciepła płynącego przez warstwy lasera do chłodnicy w inny sposób. Położenie na grzonym obszarze (ewentualnie pod nim) dostatecznie grubej warstwy materiału o dobrej przewodności cieplnej powoduje, że w tej warstwie ciepło rozplynie się na boki, i przez następne warstwy płynie znacznie szerszym strumieniem, redukując ich opór cieplny [58]. Zasada działania takiej warstwy dobrze oddaje jej angielska nazwa — *heat spreader* (niestety żaden polski jej odpowiednik nie zaistniał powszechnie). Na rysunku 8(c) przedstawiona jest struktura z *heat spreaderem*

znajdującym się nad obszarem czynnym — wewnątrz wnęki optycznej. Można go umieścić również między obszarem czynnym a chłodnicą. Istotne jest, by był on jak najbliższej źródeł ciepła, co jest najłatwiejsze przy położeniu go na obszarze czynnym. Czasami jednak optyczne niedoskonałości *heat spreadera* wewnątrz rezonatora optycznego mogą dawać niepożądane efekty, więc obie lokalizacje są stosowane.

W przypadku *heat spreadera* wewnątrzwnękowego (ang. *intra-cavity*) ważne jest, by był on przezroczysty zarówno dla pompy jaki i dla emitowanego promieniowania. Wybór materiałów przezroczystych dla promieniowania widzialnego i podczerwonego, które są jednocześnie dobrymi przewodnikami ciepła nie jest zbyt wielki, ale szczęśliwie najlepszy znany przewodnik ciepła, czyli diament, jest przezroczysty. Dobrym kandydatem jest również węgiel krzemu, ale nie jest to również materiał tani i łatwo dostępny. Inną bardzo ważną kwestią jest jakość powierzchni obu stykających się powierzchni. Kontakt chipu i *heat spreadera* musi być jak najlepszy, bo każdy dodatkowy opór cieplny na ich styku obniża efektywność tej metody. Również górna powierzchnia *heat spreadera* musi być dobrej jakości, gdyż rozpraszanie światła na jej nierównościach może wprowadzać znaczne straty optyczne. Z tych powodów chropowatość wszystkich powierzchni musi być jak najmniejsza [63].

Oczywiście obie metody obniżenia oporu cieplnego lasera (pocienianie substratu i zastosowanie *heat spreadera*) można ze sobą łączyć. Pojawia się naturalne pytanie: która z tych metod jest efektywniejsza i czy warto stosować je razem? Trójwymiarowe obliczenia cieplne (w symetrii cylindrycznej) wykonane przy użyciu oprogramowania opracowanego w naszym zespole dały interesujące wyniki. Przy założeniu, że poprzeczny rozkład gęstości źródeł ciepła opisywany jest rozkładem Gaussa od odchylenia standardowym  $50\ \mu\text{m}$  (co odpowiada  $200\ \mu\text{m}$  średnicy  $1/e^2$ ), a całkowita moc zamieniona na ciepło wynosi  $4\ \text{W}$ , przeprowadziłem obliczenia dla:

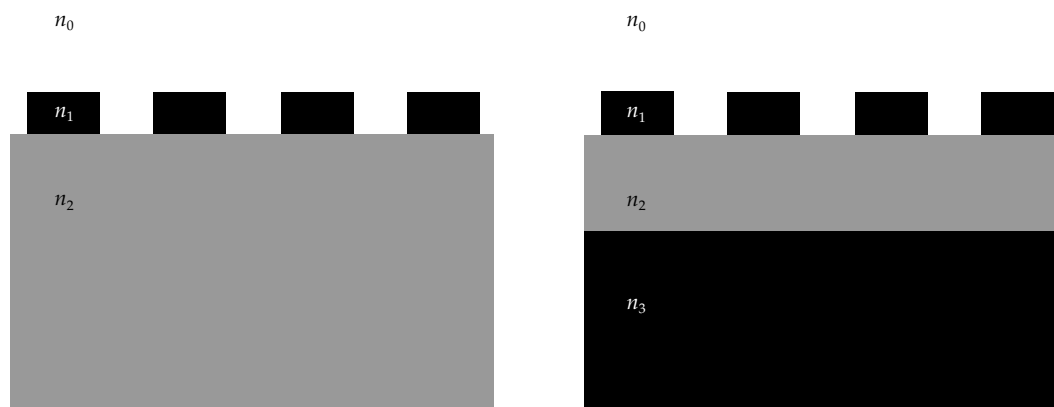
1. Struktury bez substratu i bez *heat spreadera* (jak na rysunku 8(b))
2. Struktury z substratem o grubości  $100\ \mu\text{m}$  (czyli pocienionym) i diamentowym *heat spreaderem* (rysunek 8(c)). Przyjąłem przewodność cieplną diamentu równą  $1200\ \frac{\text{W}}{\text{mK}}$ , czyli dużo niższą niż najwyższe notowane (przekraczające  $2000\ \frac{\text{W}}{\text{mK}}$ ) i założyłem idealny kontakt między strukturą a diamentem.
3. Struktury będącej połączeniem obu poprzednich.

Największy opór cieplny ( $24,5\ \text{K/W}$ ) okazała się mieć struktura pierwsza. Trzeba jednak zauważyć, że ów opór jest wielokrotnie mniejszy niż dla struktury *as grown*. Struktura numer 2 ma opór cieplny ponadczterokrotnie mniejszy niż poprzednia. Najlepsza, co naturalne, jest struktura trzecia, mająca opór cieplny nieco ponad  $4\ \text{K/W}$ . Mimo że obliczenia nie biorą pod uwagę bardzo istotnych, ale trudnych do zmierzenia, oporów cieplnych granic między strukturą a *heat spreaderem* i między strukturą a chłodnicą (czyli lutu), widać, jak duży jest potencjał zwłaszcza diamentowego *heat spreadera*.

### 6.1. Wykorzystanie *high contrast grating*

W każdej strukturze na rysunku 8 przeszkodą dla odprowadzenia ciepła jest DBR. Jego grubość określona jest parametrami materiałowymi i wymaganą dużą odbijalnością ( $\gtrsim 99\%$ ). Stanowi on istotny opór cieplny, więc gdyby udało się go zastąpić czymś lepiej przewodzącym, byłyby to droga do dalszej poprawy możliwości VECSEL-i.

Istnieje inny sposób uzyskania bardzo dużej odbijalności — *high contrast grating* (HCG). W najbardziej standardowej wersji jest to periodyczna struktura złożona z długich prostopadłościów z materiału o dużym współczynniku załamania położonych na materiale o niższym współczynniku załamania, czasem leżącym na podłożu o dużym współczynniku załamania, jak na rysunku 9. Taka konstrukcja nieco przypomina siatkę dyfrakcyjną,



Rysunek 9. Schematyczne przekroje dwóch najprostszych wersji *high contrast grating*. Współczynniki załamania spełniają nierówności:  $n_1, n_3 > n_0, n_2$ . Najczęściej materiałem o najniższym współczynniku załamania jest powietrze ( $n_0 \approx 1$ ).

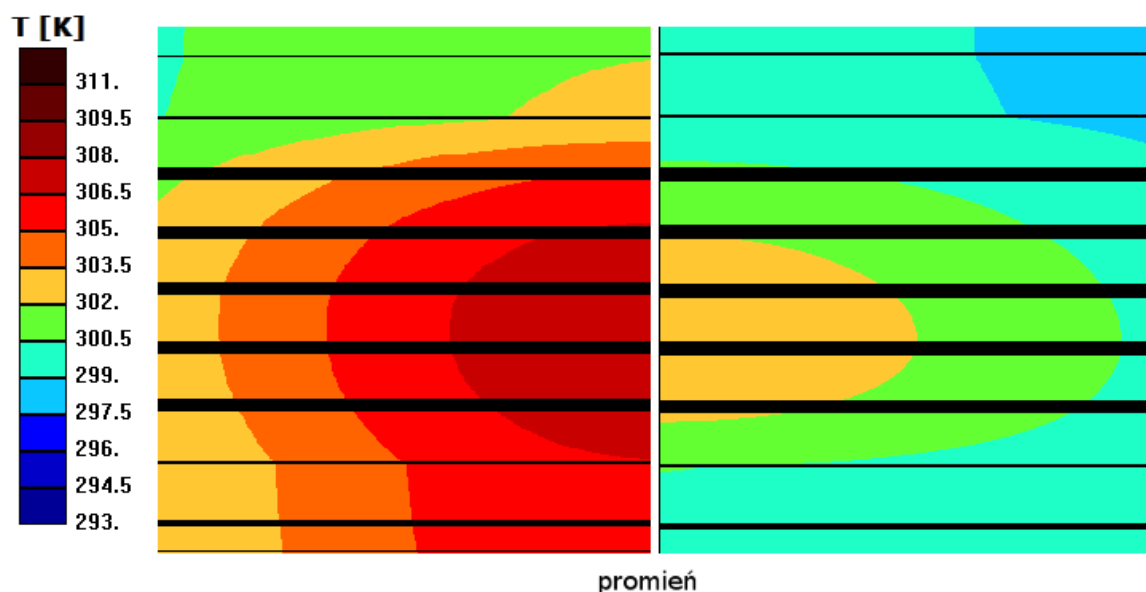
ale w przeciwieństwie do niej rozmiary prostopadłościów i odległości między nimi są mniejsze niż długość fali, stąd często nazywa się taką strukturę *subwavelength high contrast grating*. Drugą istotną różnicą jest kontrast współczynnika załamania między materiałem, z którego wykonane są paski a materiałami otaczającymi je. Odpowiednio dobierając wymiary i współczynniki załamania można dostać szerokie widmo odbijalności nie niższej niż w przypadku DBR-ów. Z punktu widzenia przewodnictwa cieplnego zyskuje się możliwość zastąpienia znaczącego opornika cieplnego, jakim jest DBR, przez, na przykład, diamentowy *heat spreader* wyposażony w odpowiedni HCG z krzemu. Kontrast współczynnika załamania między tymi materiałami wynosi około 1, do tego kontrast współczynnika załamania między nimi a powietrzem jest jeszcze większy, co zapewnia bardzo dobre parametry optyczne takiego urządzenia.

Możliwość zastąpienia DBR-u przez diament powinna dać oczywiście znaczącą poprawę oporu cieplnego lasera, ale okazuje się, że nie jest to jedyny zysk. We wniosku patentowym [patent] analizowane są trzy struktury:

1. struktura bez substratu i z diamentowym *heat spreaderem* wewnątrzwnętkowym — najlepsza możliwa do uzyskania stosowanymi do tej pory metodami
2. struktura z DBR-em zastąpionym przez diament z krzemowym HCG umieszczonym wewnątrz diamentu
3. struktura z DBR-em zastąpionym przez diament, w której miedzianej chłodnicy zrobiony jest otwór, tak by możliwe było wytworzenie HCG na granicy diament-powietrze i doprowadzenie od spodu światłowodu pompującego.

Struktura pierwsza to struktura referencyjna, druga to najprostsza (pojęciowo, nie technologicznie) realizacja pomysłu zastąpienia DBR-u przez diament. Obliczony opór cieplny

pierwszej struktury wyniósł 4,84 K/W, drugiej 3,54 K/W. Zmniejszenie oporu cieplnego jest znaczące, ale HCG z krzemu otoczonego diamentem ma niezadowalające własności optyczne. Widmo odbicia jest wąskie — szerokość, na której współczynnik odbicia przekracza 99,8% (przy wartości maksymalnej przekraczającej 99,99% w okolicy 1,55  $\mu\text{m}$ ), wynosi tylko 4 nm. Odbijalność 99,8% nie jest żadną wyróżnioną wartością, ale tak mała szerokość pokazuje, że przy dużych zmianach temperatury obszaru czynnego (związanych z pompowaniem lasera), powodujących znaczące przesunięcie widma wzmocnienia, uzyskanie dużych mocy z takiego lasera wymagałoby bardzo precyzyjnego dostrojenia konstrukcji rezonatora i mocy pompy. Poza tym wykonanie konstrukcji, w której paski krzemu są zatopione w diamentcie, jest dużym problemem.



Rysunek 10. Porównanie rozkładów temperatury w strukturze pierwszej (po lewej) i trzeciej (po prawej). Szerokość każdego z przekrojów wynosi 100  $\mu\text{m}$ .

Z punktu widzenia własności optycznych znacznie lepiej jest położyć krzem na powierzchni diamentu. Szerokość odbicia powyżej 99,8% rośnie z 4 nm do aż 60 nm. Maksymalna wartość odbicia też rośnie, co jest oczywiście zaletą, ale wydaje się, że osiągnięte wartości są już tak bliskie jedności, że nie jest to bardzo istotna poprawa. Wykonanie takiej struktury też jest znacznie prostsze niż poprzedniej. Problemem może być powietrze ją otaczające. Dzięki niemu otrzymujemy wspomniane świetne własności optyczne, ale jest ono izolatorem cieplnym. Po spodniej stronie lasera, na której ma się znaleźć omawiany HCG, znajduje się chłodnica, od której laser nie może być cieplnie odizolowany. Jednakże dzięki temu, że gruba warstwa diamentu powyżej działa jak *heat spreader*, zrobienie dziury o średnicy 1 mm w chłodnicy nie powoduje znaczącego wzrostu oporu termicznego lasera — z 3,54 K/W do 3,69 K/W. Jest tak dlatego, że dzięki diamentowi ciepło płynie znacznie większą szerokością, mimo że średnica grzejącej plamki pompy jest znacznie mniejsza niż 1 mm. Rysunek 10 pokazuje różnice między wartościami i rozkładem temperatury w strukturze pierwszej (z DBR-em na spodzie i diamentem na górze) i strukturze trzeciej

(z diamentem z obu stron). Widać na nim wyraźnie wpływ użycia spodniego diamentu na rozptyw ciepła.

Dzięki temu, że możemy, niemal bez pogarszania własności cieplnych, zrobić otwór w chłodnicy w osi lasera, zyskujemy możliwość doprowadzenia od spodu światłowodu z promieniowaniem pompującym. Pozwoli to na radykalne uproszczenie konstrukcji VECSEL-a, który będzie mógł dzięki temu być nakręcaną na światłowód końcówką i zewnętrznym zwierciadłem.

Struktury HCG mogą być zaprojektowane nie tylko tak, by otrzymać wysoką odbijalność. Modyfikując ich parametry geometryczne można na przykład uzyskać niemal 100-procentową przepuszczalność. Wydaje się, że dzięki HCG możemy uzyskać możliwość tworzenia zwierciadeł skupiających od ogniskowych rzędu mikronów, sprzęgaczy optycznych, izolatorów optycznych i innych bardzo przydatnych elementów optycznych. Nasz zespół prowadzi intensywne prace nad strukturami HCG, czego efektem są publikacje w dobrych czasopismach naukowych i prezentacje na ważnych konferencjach [64–69].

To czy lasery VECSEL znajdują istotne zastosowania poza laboratoriami naukowymi zależy między innymi od tego, czy da się za ich pomocą otrzymać emitery światła jakościowo lepsze od tych, które bazują na dotychczasowych rozwiązaniach. Takie badania, we współpracy z naszym zespołem, prowadzone są w Instytucie Technologii Elektronowej w Warszawie i w École polytechnique fédérale de Lausanne, a niektóre z ich efektów zostały już opublikowane [7, 61].

## 7. Model pojemności dla laserów półprzewodnikowych [9, 10]

Wśród zastosowań laserów półprzewodnikowych telekomunikacja optyczna jest jednym z najważniejszych. Od pewnego czasu długodystansowa telekomunikacja optyczna oparta jest głównie na łączach optycznych, w których emiterami promieniowania są półprzewodnikowe krawędziowe lasery DFB (*distributed feedback*) emitujące falę o długości około 1550 nm. Obecnie dąży się do wyeliminowania przewodów miedzianych również w przesyłach informacji na krótkich dystansach – od odległości pomiędzy chipami komputera do odległości między komputerami w jednym budynku. Dzieje się tak dlatego, że przy gigahercowych częstotliwościach modulacji napięcia straty mocy sygnału elektrycznego są ogromne [70, 71]. Gdyby udało się wykorzystać optyczny przesył informacji pomiędzy elementami komputera (na przykład pomiędzy procesorem a pamięcią RAM), wzrost szybkości komputerów byłby bardzo znaczący. Prace nad tego typu układami prowadzone są między innymi w firmie IBM [70, 72]. Póki co krótkodystansowy optyczny przesył danych jest w praktyce wykorzystywany na większych odległościach – na przykład do łączenia ze sobą komputerów w centrach danych [73]. Wykorzystanie światła do przesyłu informacji wymaga wykorzystania wielu komponentów. Jednym z nich są emitery światła. W optycznym przesyłach informacji na krótkich dystansach nie mogą zostać zastosowane takie same emitery, jak w telekomunikacji długodystansowej, między innymi ze względu na ich wysoką cenę. W takich zastosowaniach, gdzie potrzebne są bardzo duże liczby emiterów, wykorzystywane są głównie lasery VCSEL emitujące promieniowanie z zakresu bliskiej podczerwieni. Są one bardzo tanie i mają bardzo dobrą energetyczną sprawność przesyłu informacji [74]. W zastosowaniach do optycznego przesyłu danych lasery takie zasilane są napięciami modulowanymi z częstotliwościami rzędu dziesiątków gigaherców [75–81].



W takich warunkach zasilania nawet niewielka pojemność lub indukcyjność może powodować, że przebieg prądu płynącego przez laser nie odzwierciedla przebiegu napięcia, a co za tym idzie sygnał optyczny (natężenie światła emitowanego przez laser) jest inny niż sygnał elektryczny (napięciowy). W szczególności odróżnienie stanu wysokiego od niskiego może być trudne, co powoduje powstawanie błędów w optycznym przesyle informacji. W laserach półprzewodnikowych problemem nie jest indukcyjność, lecz pojemność, toteż była ona analizowana przez wielu autorów [76, 82–90], jednak nie powstał wcześniej model potrafiący przewidzieć modulacyjne własności elektryczne laserów półprzewodnikowych.

Podstawowym eksperymentem dającym ilościowy opis podatności lasera na modulację jest *small signal modulation experiment* (SSM) [91]. Pozwala on, między innymi, wyznaczyć zależność  $Z(f)$  – zespolonej impedancji urządzenia od częstotliwości modulacji. W literaturze powszechnie stosowane jest dopasowywanie wartości oporności i pojemności względnie prostego schematu zastępczego do wyników eksperymentalnych [80, 86, 87]. Takie podejście daje pewne wyobrażenie o pojemnościach związanych z różnymi elementami lasera, ale nie wystarcza, by poznać te zjawiska wystarczająco dobrze oraz nie pozwala na optymalizację lasera na etapie jego projektowania.

Nasz model, opisywany w pracy [9], bazuje na analizie, otrzymanych dzięki wykorzystaniu wcześniej opisywanych modeli elektrycznych i termicznych, rozkładów potencjałów pola elektrycznego w laserze, do którego przyłożone jest stałe napięcie. Energia pola elektrycznego może posłużyć, zamiast ładunku, do zdefiniowania pojemności kondensatora  $C$  następującym wzorem:

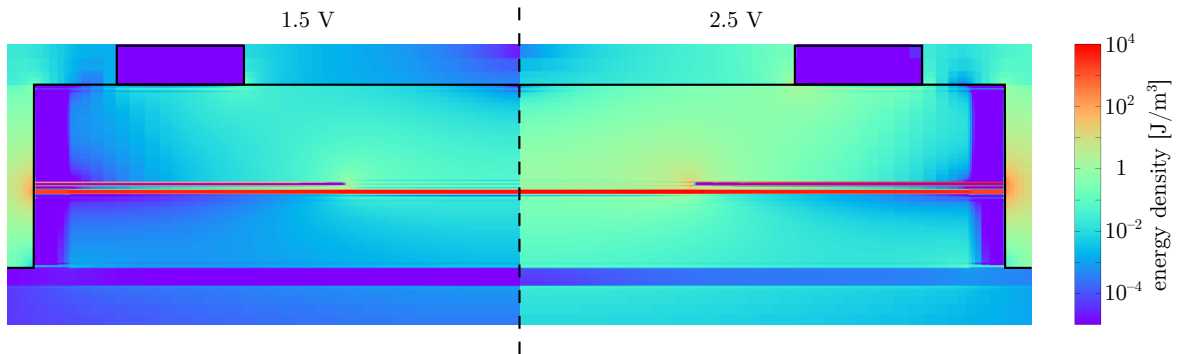
$$C = \frac{2\mathcal{E}}{U^2} \quad (22)$$

gdzie  $\mathcal{E}$  jest energią pola, a  $U$  napięciem na kondensatorze. Jako kondensator można potraktować każdy obszar pomiędzy powierzchniami ekwipotencjalnymi. Energię pola elektrycznego w dowolnym obszarze  $\Omega$  można policzyć z następującego wzoru

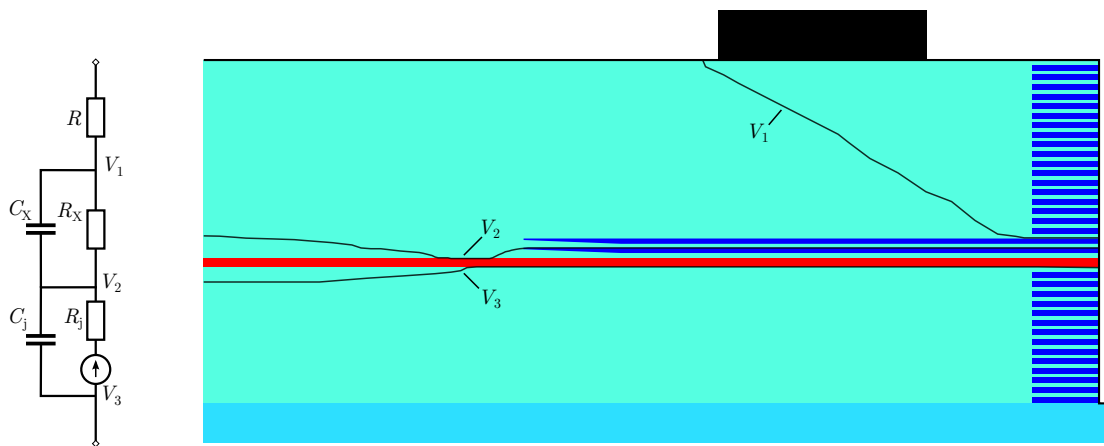
$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\Omega} \epsilon(x, y, z) (\nabla V(x, y, z))^2 dx dy dz \quad (23)$$

gdzie  $\epsilon_0$  jest stałą dielektryczną,  $\epsilon$  – względną przenikalnością ośrodka, zaś  $V$  jest obliczonym rozkładem potencjału. Na rysunku 11 przedstawiony jest przykładowy rozkład gęstości energii pola elektrycznego w arsenkowym laserze VCSEL zaprojektowanym do zastosowań w optycznym przesyle danych. Ponad 95% energii pola przypada na złącze i izolujące warstwy oksydowane. W celu analizy wpływu pojemności na własności elektryczne lasera jego obszar dzielony jest na odpowiednie obszary wyznaczone przez powierzchnie ekwipotencjalne, a następnie budowany jest odpowiedni schemat zastępczy, jak pokazano na rysunku 12. Pojemności znajdują się w opisany powyżej sposób, opory obliczane są na podstawie symulowanej wartości prądu płynącego przez laser i różnic potencjałów między powierzchniami ekwipotencjalnymi.

Weryfikacja modelu została przeprowadzona dzięki porównaniu obliczonych wartości zespolonej impedancji laserów z impedancjami zmierzonymi w eksperymencie SSMR (*small signal modulation reflection*), dla zakresu częstotliwości modulacji do 40 GHz. Przykładowe wyniki przedstawione są na rysunku 13. Widać na nich bardzo dobrą zgodność wyników teoretycznych z eksperymentem dla częstotliwości do około 20 GHz. Widoczne na wykresach zaniżanie modułu impedancji w dużych częstotliwościach można częściowo



Rysunek 11. Rozkład gęstości energii pola elektrycznego dla dwóch napięć zasilania w przykładowej strukturze lasera VCSEL [92]. Warstwy o dużej gęstości energii to, od dołu: złącze i dwie warstwy oksydowane. Linia przerywana oznacza oś symetrii, wspólną dla każdego z przekrojów.



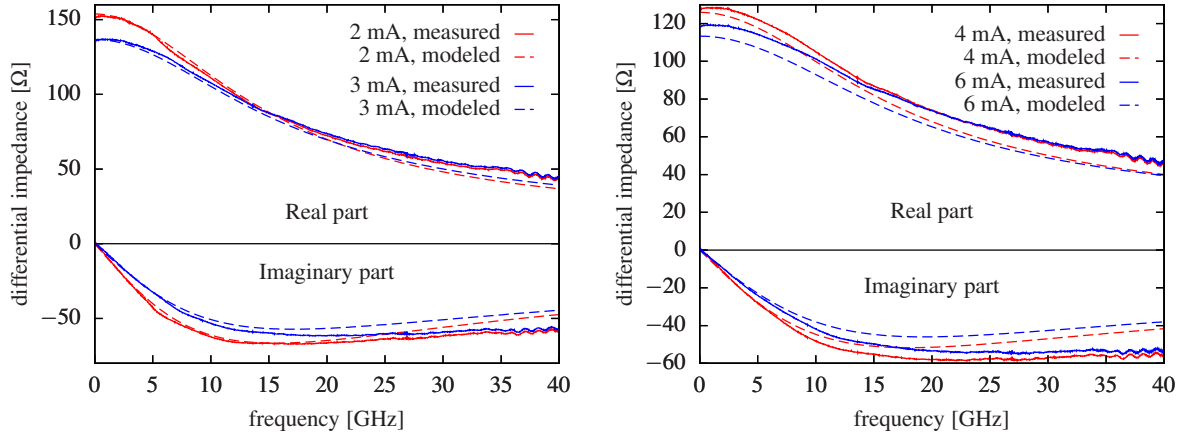
Rysunek 12. Podział lasera przez powierzchnie ekwipotencjalne i wynikający z niego schemat zastępczy [92]. Dla struktury lasera została założona symetria cylindryczna jak na rysunku 11.

wy tłumaczyć oczekiwanym spadkiem wartości przenikalności dielektrycznej przy dużych częstotliwościach modulacji. Z powodu braku odpowiednich danych materiałowych w obliczeniach przyjęto stałą, statyczną wartość tego parametru.

Znalezienie impedancji lasera nie jest ostatecznym celem modelu. Dla otrzymanego schematu blokowego można rozwiązać układ równań różniczkowych dla prądów płynących przez jego elementy. Dzięki temu możliwe jest znalezienie zniekształceń, jakim podlega sygnał napięciowy przy zmianie na sygnał prądowy. Rozwiązania  $I_l(t)$  wspomnianego układu równań opisywane są przez kombinacje liniowe zanikających funkcji eksponencjalnych oraz funkcję zależną od kształtu sygnału napięciowego  $I_l^\infty(t)$ .

$$I_l(t) = I_l^\infty(t) + A_l^{(1)} \exp(\lambda_1 t) + \dots + A_l^{(n)} \exp(\lambda_n t) \quad (24)$$

Parametry  $\lambda_i$  są ujemnymi wartościami własnymi macierzy opisującej rozważany układ równań różniczkowych. Wymiar tej macierzy zależy od liczby elementów w schemacie zastępczym. Stałe  $A_l$  wyznacza się na podstawie warunków początkowych.



Rysunek 13. Przykładowe wyniki uzyskane przy użyciu modelu pojemności. Porównanie przewidywanych przez model (linie przerywane) i zmierzonych (linie ciągłe) zespolonych impedancji lasera VCSEL w funkcji częstotliwości modulacji [9]. Obliczenia i pomiary przeprowadzono dla dwóch nadprogowych wartości prądu.

Pojemność nie jest jedynym czynnikiem ograniczającym częstotliwość modulacji laserów półprzewodnikowych. Bardzo istotne jest również zachowanie fotonów we wnętrzu rezonansowej lasera oraz procesy rekombinacji nośników w obszarze czynnym. Dynamikę rekombinacji nośników, przy uwzględnieniu ich oddziaływania z fotonami (czyli emisji spontanicznej i wymuszonej), opisuje się układem równań kinetycznych na liczbę nośników i fotonów [93]:

$$\frac{dN}{dt} = F_1(N, P) + \frac{1}{e} I(t) \quad (25)$$

$$\frac{dP}{dt} = F_2(N, P) \quad (26)$$

gdzie  $N, P$  są liczbami, odpowiednio, nośników i fotonów,  $F_1$  i  $F_2$  odpowiednimi funkcjami, w przybliżeniu małego sygnału liniowymi,  $I$  jest prądem płynącym przez laser, a  $e$  ładunkiem elementarnym. Postacie funkcji  $F_1$  i  $F_2$  w przybliżeniu liniowym można przedstawić następująco:

$$F_1(N, P) = \gamma_{11}N(t) + \gamma_{12}P(t) \quad (27)$$

$$F_2(N, P) = \gamma_{21}N(t) + \gamma_{22}P(t) \quad (28)$$

Rozwiązanie układu równań (25) w przybliżeniu liniowym nie stanowi problemu. Dla przebiegów prądu opisanych funkcjami eksponencjalnymi i trygonometrycznymi (a takie otrzymuje się po wykorzystaniu modelu pojemności przy założeniu przebiegów napięć używanych w praktyce) rozwiązanie można zapisać w postaci analitycznej. Problemem jest znalezienie wartości parametrów. Stosowane do tej pory dopasowywanie ich wartości do wyników pomiarów jest niesatysfakcjonujące. Dzięki wykorzystaniu naszych modeli numerycznych możliwe jest policzenie wartości tych parametrów na podstawie opisu struktury. Na przykład parametr  $\gamma_{22}$  jest czasem życia fotonów we wnętrzu, który można policzyć

modelem optycznym. Pozostałe parametry można wyznaczyć wykorzystując idee i rachunki, na których bazuje mój model pracy nadprogowej lasera, przedstawione w pracy [2]. Prace nad stworzeniem takiego modelu już rozpocząłem. Warto podkreślić, że najprawdopodobniej byłby to pierwszy na świecie model potrafiący obliczać parametry modulacyjne laserów półprzewodnikowych.

## 8. Podsumowanie

Przedstawione przeze mnie prace dotyczą obliczeń teoretycznych (analizy numerycznej, obliczeń kwantowomechanicznych) oraz modelowania różnych konstrukcji laserów półprzewodnikowych: o emisji krawędziowej i powierzchniowej, pompowanych elektrycznie i optycznie, z obszarami czynnymi ze studniami kwantowymi, kropkami kwantowymi i supersieciami. Większość z tych prac powstała w ramach współpracy z ośrodkami technologicznymi i była wykorzystana przy wytwarzaniu działających przyrządów. Każdy z rodzajów obszaru czynnego wymagał ode mnie opracowania oddzielnego modelu, z których szczególnie trudny (zwłaszcza numerycznie) był model supersieci, mimo że nie był to pełny model wzmocnienia. Stworzenie model pojemności wymagało z kolei zupełnie innego spojrzenia na modelowanie laserów.

Przy modelowaniu nowoczesnych przyrządów rzadko zdarza się, że znamy wiarygodne wartości wszystkich potrzebnych parametrów. Po prostu nowoczesne przyrządy często wykorzystują mało jeszcze poznane materiały i struktury. W takiej sytuacji współpraca z eksperymentatorami i dostęp do wyników wielu pomiarów są nieocenione. Trzeba pamiętać, że wyniki eksperymentalne w postaci liczb i wykresów, choćby najlepiej opracowane, nie przedstawiają pełnej informacji uzyskanej podczas pomiarów. Te gubione informacje mogą dotyczyć rzeczy, które trudno wyrazić liczbowo lub takie, które opracowujący wyniki uzna (możliwe że niesłusznie) za oczywiste lub mało istotne. Dlatego niezwykle przydatne jest własnoręczne przeprowadzanie pomiarów lub uczestniczenie w nich.

Jednak nawet w idealnej sytuacji nie należy na ogół oczekiwać od modelowania tak skomplikowanych układów dokładnej ilościowej zgodności z eksperymentem, choćby dlatego, że w początkowym etapie rozwoju nowe przyrządy charakteryzują się na ogół małą technologiczną powtarzalnością, choć nominalnie powinny być identyczne. Oczywiście nie jest to jedyna przyczyna rozbieżności między obliczeniami a pomiarami. We wstępie zostały wspomniane uproszczenia modeli pozwalające na zastosowanie ich do opisu bardziej złożonych zjawisk i obiektów. Na tym jednak w praktyce uproszczenia się nie kończą. To, że równania daje się zapisać na kartce, nie oznacza, że znalezienie ich rozwiązań (numeryczne, bo rozwiązania analityczne są luksusem, na który trudno liczyć) jest proste i szybkie. Mimo że żyjemy w zaledwie trzech wymiarach, to nawet w przypadku tak podstawowych równań jak równania Maxwella czy równania transportu (ciepła, prądu) ich rozwiązanie we wszystkich trzech wymiarach (w przypadku stacjonarnym, bez czasu) jest obecnie czasochłonne, zwłaszcza jeżeli rozwiązania wymagają samouzgodnienia. Dlatego bardzo skwapliwie wynajduje się różne symetrie pozwalające usunąć z równań przynajmniej jeden wymiar, zazwyczaj kosztem pewnego odstępstwa od rzeczywistego obiektu. Błędy wynikające z takie uproszczenia na ogół da się oszacować na przykład przez policzenie jednego przypadku zarówno trójwymiarowo jak i w wersji uproszczonej. Jeśli taki

test wykaże małe różnice między wynikami, pozostałe obliczenia można wykonywać szybko w wersji uproszczonej.

Trudniejszy problem jest z modelami kwantowymi w ciele stałym. W praktyce nie da się przeprowadzić obliczeń nieuproszczonych, więc podstawowym kryterium poprawności obliczeń jest ich zgodność z eksperymentem. Niestety wielkości bezpośrednio powiązane z takimi obliczeniami są na ogół trudne do zmierzenia. Z tych powodów w praktyce funkcjonują różne modele. Jak pokazał przykład laserów kaskadowych, nawet tak uproszczony (ale dzięki temu względnie prosty obliczeniowo) model jak metoda funkcji obwiedni potrafi wystarczająco dobrze opisywać stany elektronowe również dla wyższych poziomów energetycznych.

Mimo tego że model nieczęsto daje bardzo dobrą ilościową zgodność z eksperymentalnymi charakterystykami urządzenia (trzeba pamiętać jak wiele różnorodnych zjawisk i elementów urządzenia ma wpływ na takie charakterystyki), modelowanie bardzo dobrze sprawdza się w przewidywaniu, czy wpływ pewnej modyfikacji konstrukcji będzie korzystny czy nie. Można również traktować parametry urządzenia przewidziane modelowaniem jako ograniczenie górne na możliwe do uzyskania w praktyce wartości tych parametrów. Wynika to z tego, że, uproszczony względem rzeczywistości, model zazwyczaj idealizuje wyniki. To stwierdzenie nie zawsze jednak jest prawdziwe, ponieważ model bierze pod uwagę tylko te zjawiska, które zostały weń wbudowane. Mimo oczywistości tego stwierdzenia jest to bardzo istotna sprawa. W niektórych przypadkach brak dogłębnej wiedzy o wszystkich „trybikach” wewnątrz programu może prowadzić do wyciągania fałszywych wniosków z wyników modelowania, zwłaszcza jeśli mamy do czynienia z komercyjnym programem, który siłą rzeczy jest mniej znany użytkownikowi niż napisany własnoręcznie lub przez ludzi zza ściany, z którymi w każdej chwili można przedyskutować ewentualne wątpliwości.

Są oczywiście przypadki, kiedy wytwarzanie urządzeń jest niemożliwe bez skomplikowanego modelowania. Szczególnie dobrym przykładem są lasery kaskadowe, w których struktura stanów kwantowych supersieci obszaru czynnego musi spełniać kilka subtelnych warunków. Jednak we wszystkich przypadkach wiarygodne modelowanie może pozwolić na zaoszczędzeniu pieniędzy i czasu przy rozwijaniu przyrządów i umożliwić głębsze zrozumienie ich działania.

W niniejszym przewodniku przedstawiona jest jedynie część, choć bardzo istotna, mojej działalności. Za najważniejsze swoje osiągnięcia uważam:

1. Stworzenie modelu pojemności i podstaw modelu własności modulacyjnych laserów półprzewodnikowych oraz wykorzystanie ich do analizy laserów VCSEL. Mimo że ten model istnieje od niedawna pozwolił na przykład przewidzieć, że istnieje możliwość dużego uproszczenia struktur bez pogorszenia własności modulacyjnych. Niepublikowane jeszcze wyniki eksperymentalne potwierdzają te wnioski.
2. Stworzenie modelu pracy nadprogowej lasera. Różni się on od modeli występujących w literaturze i, podobnie jak model pojemności, dostosowany jest do modeli wcześniej opracowanych w naszym zespole, stanowiąc ich rozwinięcie. Prace przy nim pozwoliły usprawnić również obliczenia podprogowe, dzięki temu, że przeprowadziłem analizę zbieżności algorytmów.

3. Opracowanie i implementacja modelu wzmocnienia dla programu do symulacji laserów półprzewodnikowych rozwijanego w naszym zespole. Wyniki uzyskane dzięki temu modelowi wykorzystane zostały bardzo wielu publikacjach naszego zespołu.

Z rzeczy nieopisanych w tym przewodniku:

4. Rozpoczęcie badań eksperymentalnych polegających na pomiarach charakterystyk przyrządów i parametrów materiałowych używanych w konstrukcji laserów. Dzięki tym badaniom ukazała się już jedna praca [94], a pomiary prowadzone w tworzonym właśnie w naszym zespole laboratorium dostarczyły już cennych z punktu widzenia modelowania danych, których próżno szukać w literaturze. Dodatkowo, przy okazji głębszego zaangażowania się w badania eksperymentalne, pogłębiło się moje przekonanie, że podział na fizyków-teoretyków i fizyków-eksperymentatorów jest generalnie niesłuszny, oraz że nie ma wiedzy nieprzydatnej.

Ponadto satysfakcję daje mi fakt, że studenci, których prac magisterskich byłem promotorem, zajmują się pracą naukową w różnych ośrodkach. Większość z nich jest już doktorami.

## Literatura

- [11] Andrzej K. Wróblewski. "Prawda i mity w fizyce". In: Iskry, 1987. Chap. Nauka na manowcach.
- [12] Richard P. Feynman. "QED. Osobliwa teoria światła i materii". In: Prószyński i S-ka,
- [13] R.N. Hall, G.E. Fenner, J.D. Kingsley, T.J. Soltys, and R.O. Carlson. "Coherent Light Emission From GaAs Junctions". In: *Phys. Rev. Lett.* 9 (9 Nov. 1962), pp. 366–368. DOI: 10.1103/PhysRevLett.9.366. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.9.366>.
- [14] Marshall I. Nathan, William P. Dumke, Gerald Burns, Jr. Frederick H. Dill, and Gordon Lasher. "Stimulated emission of radiation from GaAs p-n junctions". In: *Applied Physics Letters* 1.3 (1962), pp. 62–64. DOI: 10.1063/1.1777371. URL: <http://link.aip.org/link/?APL/1/62/1>.
- [15] Nick Holonyak Jr. and S.F. Bevacqua. "Coherent (visible) light emission from Ga(As<sub>1-x</sub>P<sub>x</sub>) junctions". In: *Applied Physics Letters* 1.4 (1962), pp. 82–83. DOI: 10.1063/1.1753706. URL: <http://link.aip.org/link/?APL/1/82/1>.
- [16] I. Hayashi, M. B. Panish, P. W. Foy, and S. Sumski. "Junction lasers which operate continuously at room temperature". In: *Applied Physics Letters* 17.3 (1970), pp. 109–111. DOI: 10.1063/1.1653326. URL: <http://link.aip.org/link/?APL/17/109/1>.
- [17] R.D. Dupuis, P.D. Dapkus, N. Holonyak, E.A. Rezek, and A. Chin. "Room-temperature laser operation of quantum-well Ga(1-x)AlxAs-GaAs laser diodes grown by metalorganic chemical vapor deposition". In: *Applied Physics Letters* 32.5 (1978), pp. 295–297. ISSN: 0003-6951. DOI: 10.1063/1.90026.
- [18] D. Xu, C. Tong, S.F. Yoon, W. Fan, D.H. Zhang, M. Wasiak, Ł. Piskorski, K. Gutowski, R.P. Sarzała, and W. Nakwaski. "Room-temperature continuous-wave operation of the In(Ga)As/GaAs quantum-dot VCSELs for the 1.3 μm optical-fibre communication". In: *Semicond. Sci. Technol.* 24 (2009).
- [19] Jerome Faist, Federico Capasso, Deborah L. Sivco, Carlo Sirtori, Albert L. Hutchinson, and Alfred Y. Cho. "Quantum Cascade Laser". In: *Science* 264.5158 (1994), pp. 553–556. DOI: 10.1126/science.264.5158.553.
- [20] Jerome Faist, Federico Capasso, Deborah L. Sivco, Albert L. Hutchinson, Carlo Sirtori, S. N. G. Chu, and Alfred Y. Cho. "Quantum cascade laser: Temperature dependence of the performance characteristics and high T<sub>0</sub> operation". In: *Applied Physics Letters* 65.23 (1994), pp. 2901–2903. DOI: 10.1063/1.112524. URL: <http://link.aip.org/link/?APL/65/2901/1>.
- [21] J. Faist, F. Capasso, D.L. Sivco, C. Sirtori, A.L. Hutchinson, and A.Y. Cho. "Quantum cascade laser: an intersub-band semiconductor laser operating above liquid nitrogen temperature". In: *Electronics Letters* 30.11 (May 1994), pp. 865–866. ISSN: 0013-5194. DOI: 10.1049/el:19940605.
- [22] F. Capasso, J. Faist, D.L. Sivco, C. Sirtori, A.L. Hutchinson, S.N.G. Chu, and A.Y. Cho. "Quantum cascade laser: a unipolar intersubband semiconductor laser". In: *Semiconductor Laser Conference, 1994., 14th IEEE International*. Sept. 1994, pp. 71–72. DOI: 10.1109/ISLC.1994.519139.

- [23] Benjamin S. Williams. "GaAs/AlGaAs mid-infrared quantum cascade laser". MA thesis. Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, 1998.
- [24] G. Strasser, S. Gianordoli, L. Hvozdar, W. Schrenk, K. Unterrainer, and E. Gornik. "GaAs/AlGaAs superlattice quantum cascade lasers at  $\lambda \approx 13 \mu\text{m}$ ". In: *Applied Physics Letters* 75.10 (1999), pp. 1345–1347. DOI: 10.1063/1.124688. URL: <http://link.aip.org/link/?APL/75/1345/1>.
- [25] H. Page, P. Kruck, S. Barbieri, C. Sirtori, M. Stellmacher, and J. Nagle. "High peak power (1.1 W) (Al)GaAs quantum cascade laser emitting at  $9.7 \mu\text{m}$ ". In: *Electronics Letters* 35.21 (Oct. 1999), pp. 1848–1849. ISSN: 0013-5194. DOI: 10.1049/el:19991268.
- [26] Kamil Kosiel, Maciej Bugajski, Anna Szerling, Justyna Kubacka-Traczyk, Piotr Karbownik, Emilia Pruszyńska-Karbownik, Jan Muszalski, Adam Łaszcz, Przemek Romanowski, Michał Wasiak, Włodzimierz Nakwaski, Irina Makarowa, and Piotr Perlin. "77 K operation of AlGaAs/GaAs quantum cascade laser at  $9 \mu\text{m}$ ". In: *Photonics Letters of Poland* 1 (2009), pp. 16–18.
- [27] Y. Arakawa and H. Sakaki. "Multidimensional quantum well laser and temperature dependence of its threshold current". In: *Applied Physics Letters* 40.11 (1982), pp. 939–941. DOI: 10.1063/1.92959. URL: <http://link.aip.org/link/?APL/40/939/1>.
- [28] А.И. Екимов and А.А. Онущенко. "Квантовый размерный эффект в трехмерных микрокристаллах полупроводников". In: *Письма в ЖЭТФ*. 34 (1981), pp. 363–366.
- [29] A.I. Ekimov and A.A. Onushchenko. "Quantum size effect in three-dimensional microscopic semiconductor crystals". In: *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* 34 (1981), pp. 345–348.
- [30] N. Kirstaedter, N.N. Ledentsov, M. Grundmann, D. Bimberg, V.M. Ustinov, S.S. Ruvimov, M.V. Maximov, P.S. Kop'ev, Zh.I. Alferov, U. Richter, P. Werner, U. Gosele, and J. Heydenreich. "Low threshold, large  $T_0$  injection laser emission from (InGa)As quantum dots". In: *Electronics Letters* 30.17 (1994), pp. 1416–1417. ISSN: 0013-5194. DOI: 10.1049/el:19940939.
- [31] H. Shoji, K. Mukai, N. Ohtsuka, M. Sugawara, T. Uchida, and H. Ishikawa. "Lasing at three-dimensionally quantum-confined sublevel of self-organized  $\text{In}_{0.5}\text{Ga}_{0.5}\text{As}$  quantum dots by current injection". In: *Photonics Technology Letters, IEEE* 7.12 (1995), pp. 1385–1387. ISSN: 1041-1135. DOI: 10.1109/68.477257.
- [32] K. Mukai, Y. Nakata, Koji Otsubo, M. Sugawara, Naoki Yokoyama, and H. Ishikawa. "1.3- $\mu\text{m}$  CW lasing of InGaAs-GaAs quantum dots at room temperature with a threshold current of 8 mA". In: *Photonics Technology Letters, IEEE* 11.10 (1999), pp. 1205–1207. ISSN: 1041-1135. DOI: 10.1109/68.789692.
- [33] G. Park, O.B. Shchekin, D.L. Huffaker, and D.G. Deppe. "Low-threshold oxide-confined 1.3- $\mu\text{m}$  quantum-dot laser". In: *Photonics Technology Letters, IEEE* 12.3 (2000), pp. 230–232. ISSN: 1041-1135. DOI: 10.1109/68.826897.
- [34] I.R. Sellers, H-Y Liu, K.M. Groom, D.T. Childs, D. Robbins, T.J. Badcock, M. Hopkinson, D.J. Mowbray, and M.S. Skolnick. "1.3  $\mu\text{m}$  InAs/GaAs multilayer quantum-dot laser with extremely low room-temperature threshold current density". In: *Electronics Letters* 40.22 (2004), pp. 1412–1413. ISSN: 0013-5194. DOI: 10.1049/el:20046692.



- [35] D.G. Deppe, S. Freisem, G. Ozgur, K. Shavritranuruk, and H. Chen. "Very low threshold current density continuous-wave quantum dot laser diode". In: *Semiconductor Laser Conference, 2008. ISLC 2008. IEEE 21st International*. 2008, pp. 33–34. DOI: 10.1109/ISLC.2008.4635995.
- [36] E. C. Le Ru, P. Howe, T. S. Jones, and R. Murray. "Strain-engineered InAs/GaAs quantum dots for long-wavelength emission". In: *Phys. Rev. B* 67 (16 Apr. 2003), p. 165303. DOI: 10.1103/PhysRevB.67.165303. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.67.165303>.
- [37] M.A. Majid, D. T D Childs, H. Shahid, Siming Chen, K. Kennedy, R.J. Airey, R.A. Hogg, Edmund Clarke, P. Howe, P.D. Spencer, and Ray Murray. "Toward 1550-nm GaAs-Based Lasers Using InAs/GaAs Quantum Dot Bilayers". In: *Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE Journal of* 17.5 (2011), pp. 1334–1342. ISSN: 1077-260X. DOI: 10.1109/JSTQE.2011.2108270.
- [38] E. Clarke, P. Spencer, E. Harbord, P. Howe, and R. Murray. "Growth, optical properties and device characterisation of InAs/GaAs quantum dot bilayers". In: *Journal of Physics: Conference Series* 107.1 (2008), p. 012003. URL: <http://stacks.iop.org/1742-6596/107/i=1/a=012003>.
- [39] Y. Ben-Ezra M. Haridim B.I. Lembrikov. "Advances in Optical Amplifiers". In: *InTech*, 2011. Chap. Semiconductor Optical Amplifiers.
- [40] Z.Y. Zhang, A.E.H. Oehler, B. Resan, S. Kurmulis, K.J. Zhou, Q. Wang, M. Mangold, T. Süedmeyer, U. Keller, K.J. Weingarten, and R.A. Hogg. "1.55  $\mu\text{m}$  InAs/GaAs Quantum Dots and High Repetition Rate Quantum Dot SESAM Mode-locked Laser". In: *Sci. Rep.* 2 (2012).
- [41] A. Mohan, M. Felici, P. Gallo, B. Dwir, A. Rudra, J. Faist, and E. Kapon. "Polarization-entangled photons produced with high-symmetry site-controlled quantum dots". In: *Nature Photonics* 4 (2010), pp. 302–306.
- [42] Gediminas Juska, Valeria Dimastrodonato, Lorenzo O. Mereni, and Agnieszka Gocalska and Emanuele Pelucchi. "Towards quantum-dot arrays of entangled photon emitters". In: *Nature Photonics* 7 (2013), pp. 527–531.
- [43] Włodzimierz Nakwaski, Robert P. Sarzala, M. Wasiak, T. Czystanowski, and Paweł Mackowiak. *Single-photon devices in quantum cryptography*. 2003. DOI: 10.1117/12.519752. URL: <http://dx.doi.org/10.1117/12.519752>.
- [44] Julien Claudon, Joël Bleuse, Nitin Singh Malik, Maela Bazin, Périne Jaffrennou, Niels Gregersen, Christophe Sauvan, Philippe Lalanne, and Jean-Michel Gérard. "A highly efficient single-photon source based on a quantum dot in a photonic nanowire". In: *Nature Photonics* 4 (2010), pp. 174–177.
- [45] Kohki Mukai, Nobuyuki Ohtsuka, Hajime Shoji, and Mitsuru Sugawara. "Growth and optical evaluation of InGaAs/GaAs quantum dots self-formed during alternate supply of precursors". In: *Applied Surface Science* 112.0 (1997), pp. 102–109. ISSN: 0169-4332. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0169-4332\(96\)00993-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0169-4332(96)00993-2). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169433296009932>.
- [46] S.H. Pyun and W.G. Jeong. "Luminescence Characteristics of InGaAs/GaAs Quantum Dots Emitting Near 1.5  $\mu\text{m}$ ". In: *Journal of the Korean Physical Society* 56 (2010), pp. 586–590.

- [47] Arkadiusz Wojs, Pawel Hawrylak, Simon Fafard, and Lucjan Jacak. “Electronic structure and magneto-optics of self-assembled quantum dots”. In: *Phys. Rev. B* 54 (8 Aug. 1996), pp. 5604–5608. DOI: 10.1103/PhysRevB.54.5604. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.54.5604>.
- [48] Stephanie M. Reimann and Matti Manninen. “Electronic structure of quantum dots”. In: *Rev. Mod. Phys.* 74 (4 Nov. 2002), pp. 1283–1342. DOI: 10.1103/RevModPhys.74.1283. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.74.1283>.
- [49] A. Markus, J.X. Chen, C. Paranthoen, A. Fiore, C. Platz, and O. Gauthier-Lafaye. “Simultaneous two-state lasing in quantum-dot lasers”. In: *Applied Physics Letters* 82.12 (2003), pp. 1818–1820. ISSN: 0003-6951. DOI: 10.1063/1.1563742.
- [50] Hsing-Yeh Wang, Hsu-Chieh Cheng, Sheng-Di Lin, and Chien-Ping Lee. “Wavelength switching transition in quantum dot lasers”. In: *Applied Physics Letters* 90.8, 081112 (2007). DOI: <http://dx.doi.org/10.1063/1.2709987>. URL: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/apl/90/8/10.1063/1.2709987>.
- [51] Y. Ding, W.J. Fan, B.S. Ma, D.W. Xu, S.F. Yoon, S. Liang, L.J. Zhao, M. Wasiak, T. Czystanowski, and W. Nakwaski. “Microphotoluminescence investigation of InAs quantum dot active region in 1.3  $\mu\text{m}$  vertical cavity surface emitting laser structure”. In: *Journal of Applied Physics* 108.7 (2010). ISSN: 0021-8979. DOI: 10.1063/1.3490236.
- [52] Tsuei-Lian Wang, Y. Kaneda, J.M. Yarborough, J. Hader, J.V. Moloney, A. Chernikov, S. Chatterjee, S.W. Koch, B. Kunert, and W. Stolz. “High-Power Optically Pumped Semiconductor Laser at 1040 nm”. In: *Photonics Technology Letters, IEEE* 22.9 (May 2010), pp. 661–663. ISSN: 1041-1135. DOI: 10.1109/LPT.2010.2043731.
- [53] W. B. Jiang, S. R. Friberg, H. Iwamura, and Y. Yamamoto. “High powers and sub-picosecond pulses from an external-cavity surface-emitting InGaAs/InP multiple quantum well laser”. In: *Applied Physics Letters* 58.8 (Feb. 1991), pp. 807–809. ISSN: 0003-6951. DOI: 10.1063/1.104495.
- [54] B. Heinen, T.-L. Wang, M. Sparenberg, A. Weber, B. Kunert, J. Hader, S.W. Koch, J.V. Moloney, M. Koch, and W. Stolz. “106 W continuous-wave output power from vertical-external-cavity surface-emitting laser”. In: *Electronics Letters* 48.9 (2012), pp. 516–517. ISSN: 0013-5194. DOI: 10.1049/el.2012.0531.
- [55] Jill D. Berger, Douglas W. Anthon, Andrea Caprara, Juan L. Chilla, Sergei V. Govorkov, Arnaud Y. Lepert, Wayne Mefferd, Qi-Ze Shu, and Luis Spinelli. “20 Watt CW TEM<sub>00</sub> intracavity doubled optically pumped semiconductor laser at 532 nm”. In: (2012). DOI: 10.1117/12.907511. URL: [+%20http://dx.doi.org/10.1117/12.907511](http://dx.doi.org/10.1117/12.907511).
- [56] A. Rantamäki, A. Sirbu, A. Mereuta, E. Kapon, and O. G. Okhotnikov. “3 W of 650 nm red emission by frequency doubling of wafer-fused semiconductor disk laser”. In: *Optics Express* 18.21 (2010), pp. 21645–21650.
- [57] M. Guina, A. Härkönen, V.M. Korpijärvi, T. Leinonen, and S. Suomalainen. “Semiconductor Disk Lasers: Recent Advances in Generation of Yellow-Orange and Mid-IR Radiation”. In: *Advances in Optical Technologies* (2012).
- [58] A. Sirbu, N. Volet, A. Mereuta, J. Lyytikäinen, J. Rautiainen, O. Okhotnikov, J. Walczak, M. Wasiak, T. Czystanowski, A. Caliman, Q. Zhu, V. Iakovlev, and E. Kapon.

- “Wafer-Fused Optically Pumped VECSELS Emitting in the 1310-nm and 1550-nm Wavebands”. In: *Advances in Optical Technologies* (2011).
- [59] A. Jasik, A.K. Sokół, A. Broda, I. Sankowska, A. Wójcik-Jedlińska, A. Trajnerowicz, M. Wasiak, J. Kubacka-Traczyk, and J. Muszalski. “Strain impact on periodic gain structures on Vertical External Cavity Surface-Emitting Lasers”. in preparation.
- [60] A. Jasik, A. Sokół, J. Muszalski, A. Wójcik-Jedlińska, J. Kubacka-Traczyk, A. Broda, M. Wasiak, I. Sankowska, and A. Trajnerowicz. “Dual-wavelength vertical external cavity surface emitting laser – simplified design and strict growth control”. in preparation.
- [61] J. Muszalski, A. Broda, A. Trajnerowicz, A. Wójcik-Jedlińska, R.P. Sarzała, M. Wasiak, P. Gutowski, I. Sankowska, J. Kubacka-Traczyk, and K. Gołaszewska-Malec. “Switchable double wavelength generating vertical external cavity surface-emitting laser”. In: *Opt. Express* 22 (2014), pp. 6447–6452.
- [62] K.S. Kim, J.R. Yoo, S.H. Cho, S.M. Lee, S.J. Lim, J.Y. Kim, J.H. Lee, T. Kim, and Y.J. Park. “1060 nm vertical-external-cavity surface-emitting lasers with an optical-to-optical efficiency of 44% at room temperature”. In: *Applied Physics Letters* 88.9, 091107 (2006), p. 091107. DOI: 10.1063/1.2181272. URL: <http://link.aip.org/link/?APL/88/091107/1>.
- [63] Li Fan, J. Hader, Marc Schillgalies, M. Fallahi, Aramais R. Zakharian, J.V. Moloney, Robert Bedford, James T. Murray, S.W. Koch, and W. Stolz. “High-power optically pumped VECSEL using a double-well resonant periodic gain structure”. In: *Photonics Technology Letters, IEEE* 17.9 (2005), pp. 1764–1766. ISSN: 1041-1135. DOI: 10.1109/LPT.2005.853536.
- [64] M. Gębski, O. Kuzior, M. Dems, M. Wasiak, Y.Y. Xie, Z.J. Xu, Q.J. Wang, D.H. Zhang, and T. Czyszanowski. “Transverse mode control in high-contrast grating VCSELS”. In: *Optics Express* 22.17 (2014), pp. 20954–20963.
- [65] Marcin Gębski, Maciej Dems, Michał Wasiak, Robert P. Sarzała, J.A. Lott, and Tomasz Czyszanowski. “Double high refractive-index contrast grating VCSEL”. In: *Proc. SPIE* 9381 (2015), 93810Q-93810Q-7. DOI: 10.1117/12.2079328. URL: <http://dx.doi.org/10.1117/12.2079328>.
- [66] M. Gębski, O. Kuzior, M. Wasiak, A. Szerling, A. Wójcik-Jedlińska, N. Pałka, M. Dems, Y. Y. Xie, Z. J. Xu, Q. J. Wang, D. H. Zhang, and T. Czyszanowski. “High-contrast grating reflectors for 980 nm vertical-cavity surface-emitting lasers”. In: *Proc. SPIE* 9372 (2015), pp. 937206-937206-9. DOI: 10.1117/12.2080989. URL: <http://dx.doi.org/10.1117/12.2080989>.
- [67] M. Gębski, M. Dems, A. Szerling, M. Motyka, L. Marona, R. Kruszka, D. Urbańczyk, M. Walczakowski, N. Pałka, A. Wójcik-Jedlińska, Q. J. Wang, D. H. Zhang, M. Bugajski, M. Wasiak, and T. Czyszanowski. “Monolithic high-index contrast grating: a material independent high-reflectance VCSEL mirror”. In: *Opt. Express* 23.9 (May 2015), pp. 11674–11686. DOI: 10.1364/OE.23.011674.
- [68] M. Gębski, M. Dems, M. Wasiak, J. A. Lott, and T. Czyszanowski. “Monolithic Sub-wavelength High-Index-Contrast Grating VCSEL”. In: *IEEE Photonics Technology Letters* 27.18 (Sept. 2015), pp. 1953–1956. ISSN: 1041-1135. DOI: 10.1109/LPT.2015.2447932.

- [69] Czyszanowski Tomasz, Gębski Marcin, Dems Maciej, Wasiak Michał, Sarzała Robert, and Panajotov Krassimir. "Subwavelength grating as both emission mirror and electrical contact for VCSELs in any material system". In: *Scientific Reports* 7 (Jan. 2017), p. 40348. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/srep40348>. DOI: [10.1038/srep40348](http://dx.doi.org/10.1038/srep40348).
- [70] C. Schow, F. Doany, and J. Kash. "Get on the optical bus". In: *Spectrum, IEEE* 47.9 (Sept. 2010), pp. 32–56. ISSN: 0018-9235. DOI: [10.1109/MSPEC.2010.5557513](https://doi.org/10.1109/MSPEC.2010.5557513).
- [71] Kai Chen, A. Singla, A. Singh, K. Ramachandran, Lei Xu, Yueping Zhang, Xitao Wen, and Yan Chen. "OSA: An optical switching architecture for data center networks with unprecedented flexibility". In: *Networking, IEEE/ACM Transactions on* 22.2 (Apr. 2014), pp. 498–511. ISSN: 1063-6692. DOI: [10.1109/TNET.2013.2253120](https://doi.org/10.1109/TNET.2013.2253120).
- [72] F.E. Doany, C.L. Schow, B.G. Lee, R.A. Budd, C.W. Baks, C.K. Tsang, J.U. Knickerbocker, R. Dangel, B. Chan, How Lin, C. Carver, Jianzhuang Huang, J. Berry, D. Bajkowski, F. Libsch, and J.A. Kash. "Terabit/s-class optical PCB links incorporating 360-Gb/s bidirectional 850 nm parallel optical transceivers". In: *Lightwave Technology, Journal of* 30.4 (Feb. 2012), pp. 560–571. ISSN: 0733-8724. DOI: [10.1109/JLT.2011.2177244](https://doi.org/10.1109/JLT.2011.2177244).
- [73] F. Doany. *Power-efficient, high-bandwidth optical interconnects for high performance computing*. Hot Interconnects. Aug. 2012.
- [74] P. Moser, J.A. Lott, and D. Bimberg. "Energy Efficiency of Directly Modulated Oxide-Confined High Bit Rate 850-nm VCSELs for Optical Interconnects". In: *Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE Journal of* 19.4 (July 2013), p. 1702212. ISSN: 1077-260X. DOI: [10.1109/JSTQE.2013.2255266](https://doi.org/10.1109/JSTQE.2013.2255266).
- [75] P. Westbergh, R. Safaisini, Å Haglund, B. Kögel, J.S. Gustavsson, A. Larsson, M. Geen, R. Lawrence, and A. Joel. "High-speed 850 nm VCSELs with 28 GHz modulation bandwidth operating error-free up to 44 Gbit/s". In: *Electronics Letters* 48 (18 Aug. 2012), 1145–1147(2). ISSN: 0013-5194. URL: <http://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/el.2012.2525>.
- [76] Chih-Hao Chang, L. Chrostowski, and C.J. Chang-Hasnain. "Parasitics and design considerations on oxide-implant VCSELs". In: *Photonics Technology Letters, IEEE* 13.12 (Dec. 2001), pp. 1274–1276. ISSN: 1041-1135. DOI: [10.1109/68.969879](https://doi.org/10.1109/68.969879).
- [77] H. Li, P. Wolf, P. Moser, G. Larisch, J.A. Lott, and D. Bimberg. "Temperature-Stable 980-nm VCSELs for 35-Gb/s Operation at 85°C With 139-fJ/bit Dissipated Heat". In: *Photonics Technology Letters, IEEE* 26.23 (Dec. 2014), pp. 2349–2352. ISSN: 1041-1135. DOI: [10.1109/LPT.2014.2354736](https://doi.org/10.1109/LPT.2014.2354736).
- [78] P. Moser, J.A. Lott, G. Larisch, and D. Bimberg. "Impact of the Oxide-Aperture Diameter on the Energy-Efficiency, Bandwidth, and Temperature Stability of 980-nm VCSELs". In: *J. Lightwave Technol.* 33.4 (Feb. 2015), pp. 825–831. DOI: [10.1109/JLT.2014.2365237](https://doi.org/10.1109/JLT.2014.2365237).
- [79] P. Westbergh, J.S. Gustavsson, B. Kögel, Å. Haglund, and A. Larsson. "Impact of Photon Lifetime on High-Speed VCSEL Performance". In: *Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE Journal of* 17.6 (Nov. 2011), pp. 1603–1613. ISSN: 1077-260X. DOI: [10.1109/JSTQE.2011.2114642](https://doi.org/10.1109/JSTQE.2011.2114642).
- [80] H. Li, J.A. Lott, P. Wolf, P. Moser, G. Larisch, and D. Bimberg. "Temperature-Dependent Impedance Characteristics of Temperature-Stable

- High-Speed 980-nm VCSELs". In: *Photonics Technology Letters, IEEE* 27.8 (Apr. 2015), pp. 832–835. ISSN: 1041-1135. DOI: 10.1109/LPT.2015.2393863.
- [81] P. Westbergh, J.S. Gustavsson, A. Haglund, M. Skold, A. Joel, and A. Larsson. "High-Speed, Low-Current-Density 850 nm VCSELs". In: *Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE Journal of* 15.3 (May 2009), pp. 694–703. ISSN: 1077-260X. DOI: 10.1109/JSTQE.2009.2015465.
- [82] K.L. Lear, V.M. Hietala, H.Q. Hou, M. Ochiai, J.J. Banas, B.E. Hammons, J.C. Zolper, and S.P. Kilcoyne. "Small and large signal modulation of 850 nm oxide-confined vertical cavity surface emitting lasers". In: *Advances in Vertical Cavity Surface Emitting Lasers in Trends in Optics and Photonics Series* 15 (1997), pp. 69–74.
- [83] Y. Liu, W.-C. Ng, F. Oyafuso, B. Klein, and K. Hess. "Simulating the modulation response of VCSELs: the effects of diffusion capacitance and spatial hole-burning". In: *IEE Proceedings–Optoelectronics*. Vol. 149. 4. IET. 2002, pp. 182–188.
- [84] J. Strologas and K. Hess. "Diffusion capacitance and laser diodes". In: *Electron Devices, IEEE Transactions on* 51.3 (Mar. 2004), pp. 506–509. ISSN: 0018-9383. DOI: 10.1109/TED.2003.822345.
- [85] L.F. Feng, C.D. Wang, H.X. Cong, C.Y. Zhu, Jun Wang, X.S. Xie, C.Z. Lu, and G.Y. Zhang. "Sudden change of electrical characteristics at lasing threshold of a semiconductor laser". In: *Quantum Electronics, IEEE Journal of* 43.6 (June 2007), pp. 458–461. ISSN: 0018-9197. DOI: 10.1109/JQE.2007.895663.
- [86] A.N. Al-Omari and K.L. Lear. "Polyimide-planarized vertical-cavity surface-emitting lasers with 17.0-GHz bandwidth". In: *Photonics Technology Letters, IEEE* 16.4 (Apr. 2004), pp. 969–971. ISSN: 1041-1135. DOI: 10.1109/LPT.2004.824622.
- [87] Y. Ou, J.S. Gustavsson, P. Westbergh, Å. Haglund, A. Larsson, and A. Joel. "Impedance Characteristics and Parasitic Speed Limitations of High-Speed 850-nm VCSELs". In: *Photonics Technology Letters, IEEE* 21.24 (Dec. 2009), pp. 1840–1842. ISSN: 1041-1135. DOI: 10.1109/LPT.2009.2034618.
- [88] M. Grabherr, S. Intemann, S. Wabra, P. Gerlach, M. Riedl, and R. King. "25 Gbps and beyond: VCSEL development at Philips". In: *Proc. SPIE* 8639 (2013).
- [89] P. Westbergh. "High Speed Vertical Cavity Surface Emitting Lasers for Short Reach Communication". PhD thesis. Chalmers University of Technology, 2011. ISBN: 978-91-7385-527-3.
- [90] Yu-Chia Chang and L.A. Coldren. "Efficient, High-Data-Rate, Tapered Oxide-Aperture Vertical-Cavity Surface-Emitting Lasers". In: *Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE Journal of* 15.3 (May 2009), pp. 704–715. ISSN: 1077-260X. DOI: 10.1109/JSTQE.2008.2010955.
- [91] "Basic Small Signal Modulation Response". English. In: *Ultra-high Frequency Linear Fiber Optic Systems*. Ed. by Kam Y. Lau. Springer Berlin Heidelberg, 2009, pp. 11–18. ISBN: 978-3-540-25350-1. DOI: 10.1007/978-3-540-49906-0\_2. URL: [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-49906-0\\_2](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-49906-0_2).
- [92] Michał Wasiak, Patrycja Śpiewak, Philip Moser, and James A. Lott. *Capacitance and modulation time constant in oxide-confined vertical-cavity surface-emitting lasers with different oxide layers*. 2016. DOI: 10.1117/12.2230312. URL: <http://dx.doi.org/10.1117/12.2230312>.

- [93] LA Coldren and SW Corzine. *Diode lasers and photonic integrated circuits*. John Wiley & Sons, 1995.
- [94] Michał Wasiak, Jarosław Walczak, Marcin Motyka, Filip Janiak, Artur Trajnerowicz, and Agata Jasik. "Below-band-gap absorption in undoped GaAs at elevated temperatures". In: *Optical Materials* 64 (2017), pp. 137–141. ISSN: 0925-3467. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optmat.2016.11.028>.