

# Autoreferat

## **1. Imię i Nazwisko.**

Tomasz Marek Rusin

## **2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe/ artystyczne – z podaniem nazwy, miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej.**

Doktorat w 1999 roku

Praca doktorska w Instytucie Fizyki PAN w Warszawie:

„Stany wodoropodobne w heterostrukturach kwantowych z półprzewodników półmagnetycznych i ich wpływ na oddziaływania magnetyczne w tych strukturach”

Promotor: Prof. Dr hab. Jacek Kossut.

Magisterium w 1993 roku

Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki, promotor: Prof. Dr hab. Józef Spałek.

## **3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych/ artystycznych.**

W latach 1993-1998 byłem studentem studiów doktoranckich w Instytucie Fizyki PAN w Warszawie. W latach 1996-1997 (6 miesięcy) byłem stypendystą Fulbrighta na Uniwersytecie Purdue, w USA.

Od 1998 roku pracuję poza strukturami akademickimi i naukowymi. Obecne zatrudnienie: Orange Customer Service, sp. o.o., ul Twarda 18, 00-105, Warszawa na stanowisku na stanowisku "Kierownik Wydziału Raportowania". W ramach pełnionej funkcji zarządzam zespołem 32 pracowników. Zakres realizowanych przeze mnie zadań koncentruje się na analizie danych klientów, w głównej mierze z zastosowaniem metod Data Mining. Odpowiadam za raportowanie w firmie oraz za definicje i raportowanie kluczowych wskaźników operacyjnych.

#### 4. Opis prac stanowiących podstawę habilitacji

*Na postawę habilitacji składa się zbiór ośmiu prac autora opublikowanych w latach 2007-2012 poświęcony analizie zjawiska Zitterbewegung (ZB, ruch drżący) w ciałach krystalicznych (półprzewodniki, grafen) oraz w relatywistycznej fizyce kwantowej.*

##### Wstęp

Ruch drżący został przewidziany teoretycznie przez E. Schrodingera w 1930 roku<sup>1</sup>. Opisując ruch swobodnego elektronu przy pomocy równania Diraca, Schrodinger zauważył, że także w nieobecności pól zewnętrznych relatywistyczny elektron nie porusza się ruchem prostoliniowym ze stałą prędkością, lecz oscyluje wokół klasycznej trajektorii z częstością rzędu  $2m_0c^2/\hbar$  oraz amplitudą rzędu  $\lambda_c = \hbar/m_0c$ . Szybkie oscylacje położenia i prędkości elektronu zostały nazwane Zitterbewegung, co można przetłumaczyć jako „ruch drżący”. Od chwili odkrycia zjawisko ZB budziło kontrowersje. Po pierwsze, zarówno bardzo wysoka częstość oscylacji (rzędu  $10^{21} \text{ s}^{-1}$ ) jak i znikoma amplituda ( $0.00386 \text{ \AA}$ ) uniemożliwiają obserwację ZB w próżni. Po drugie, w swoim oryginalnym wyprowadzeniu ZB opisuje zależność czasową *operatora* położenia, a nie prędkości lub położenia elektronu. Dlatego przez wiele lat ZB był traktowany jako swoista ciekawostka lub artefakt teorii Diraca. Od odkrycia ZB w 1930 roku aż do 2005 roku ukazywało się rocznie od kilku do kilkunastu prac poświęconych ZB. Traktowane one były jednak często jako wątek poboczny do głównych tematów prac. W większości prac w tym okresie zajmowano się ZB w teorii relatywistycznej dla cząstek w próżni. Najważniejsze prace dotyczące ZB w próżni, których wyniki znalazły zastosowanie przy analizie ZB w układach krystalicznych, symulacjach lub zjawiskach falowych to:

- Huang<sup>2</sup> – analiza ZB dla pakietu w formie funkcji delta,
- Lock<sup>3</sup> – wskazanie na zanikanie w czasie oscylacji ZB pakietu falowego, które jest konsekwencją lematu Riemanna – Lesbegue’a,
- Barut i inni<sup>4</sup> – prace poświęcone różnym aspektom ZB w próżni.

Pojedyncze prace mówiące o możliwości występowania ZB w ciałach stałych (Lurie i Cremer<sup>5</sup>, Cannata i inni<sup>6</sup>, Wonsowski i inni<sup>7</sup>) nie przebiły się do głównego nurtu literatury

<sup>1</sup> E. Schrodinger, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.Math. Kl. **24**, 418 (1930).

<sup>2</sup> K. Huang, Am. J. Phys. **20**, 479 (1952).

<sup>3</sup> J. A. Lock, Am. J. Phys. **47**, 797 (1979).

<sup>4</sup> A. O. Barut i A. J. Bracken, Phys. Rev. D **23**, 2454 (1981); A. O. Barut i W. D. Thacker, Phys. Rev. D **31**, 2076 (1985).

naukowej. Przegląd tych prac zamieszczono w artykule przeglądowym (nr "6" niniejszego zestawienia).

Sytuacja zmieniła się w 2005 roku, gdy opublikowano dwie prace wskazujące na możliwość występowania ZB w ciałach stałych. Zawadzki<sup>8</sup> pokazał, że w uproszczonym modelu Kane'a można obliczyć zależność  $x(t)$  w sposób analogiczny, jak dla równania Diraca. Zasadniczą różnicą pomiędzy ZB dla elektronu Diraca w próżni a ZB dla elektronu w modelu Kane'a dla półprzewodników jest amplituda oscylacji rzędu  $\lambda_z = \hbar/m^*u$ , gdzie  $m^*$  jest masą efektywną elektronu, a  $u$  jest jego maksymalną prędkością. Przyjmując typowe wartości  $m^*$  i  $u$  dla półprzewodników okazuje się, że  $\lambda_z$  przyjmuje wartości od kilku do kilkudziesięciu Angströmów, a częstość oscylacji ZB odpowiada bliższej lub dalszej podczerwieni. Dlatego ZB dla elektronu w półprzewodnikach może być znacznie łatwiejsze do zaobserwowania niż ZB dla elektronu w próżni. Drugą pracą mającą znaczny wpływ na wzrost zainteresowania zjawiskiem ZB była praca Schliemanna i innych<sup>9</sup>, w której obliczono ZB dla pakietu falowego dla Hamiltonianu elektronu z rozszczepieniem spinowym Rashby. Autorzy pokazali, że warunkiem koniecznym do występowania ZB jest niezerowa prędkość początkowa pakietu falowego. Częstość oscylacji ZB obliczona przez Schliemanna i innych odpowiada typowym częstościom występującym w półprzewodnikach, a amplituda oscylacji jest rzędu odległości międzyatomowych.

W szeregu innych prac w latach 2006-2012 analizowano możliwość wystąpienia ZB w półprzewodnikach, grafenie, periodycznych układach falowych oraz w super-sieciach optycznych. W zaproponowanych modelach badano własności ruchu ZB oraz proponowano konfiguracje eksperymentalne umożliwiające obserwację zjawiska ZB. Dla jednowymiarowego równania Diraca oscylacje ZB zostały symulowane eksperymentalnie w 2010 roku przez Gerritsmę i innych<sup>10</sup> przy użyciu techniki pułapek jonowych oraz przez Dreisowa i innych<sup>11</sup> w super-sieciach optycznych, natomiast falowa wersja oscylacji ZB

---

<sup>5</sup> D. Lurie i S. Cremer, *Physica* **50**, 224 (1970).

<sup>6</sup> F. Cannata, L. Ferrari, i G. Russo, *Solid State Commun.* **74**, 309 (1990); L. Ferrari i G. Russo, *Phys. Rev. B* **42**, 7454 (1990).

<sup>7</sup> S. V. Vonsovskii, M. S. Svirskii, i L. M. Svirskaya *Teor. Mat. Fiz.* **85**, 211 (1990) (po rosyjsku).

<sup>8</sup> W. Zawadzki, *Phys. Rev. B* **72**, 085217 (2005).

<sup>9</sup> J. Schliemann, D. Loss, i R. M. Westervelt, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 206801 (2005).

<sup>10</sup> R. Gerritsma, G. Kirchmair, F. Zahringer, E. Solano, R. Blatt, i C. F. Roos, *Nature (London)* **463**, 68 (2010).

<sup>11</sup> F. Dreisow, M. Heinrich, R. Keil, A. Tunnermann, S. Nolte, S. Longhi, i A. Szameit, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 143902 (2010).

została zaobserwowana w 2008 roku w kryształach sonicznych przez Zhang i Liu<sup>12</sup>. Z formalnego punktu widzenia zjawisko ZB w próżni dla elektronów Diraca i cząstek o spinie zero, opisywanych równaniem Kleina-Gordona jest podobne do ZB w ciałach krystalicznych – półprzewodnikach z wąską przerwą lub grafenie. Prezentowany w autoreferacie zbiór publikacji autora i Zawadzkiego zawiera prace istotne dla zrozumienia i wyjaśnienia zjawiska ZB w próżni, jak i dla ciał krystalicznych. Prace te omówione są poniżej.

**1) T. M. Rusin i W. Zawadzki**

**“Zitterbewegung of nearly-free and tightly-bound electrons in semiconductors”**

J. Phys.: Condens. Matter **19**, 136219 (2007) [18 stron].

DOI:10.1088/0953-8984/19/13/136219

18 cytowań (Web Of Science), Impact Factor = 1.886

Udział autora: 75%.

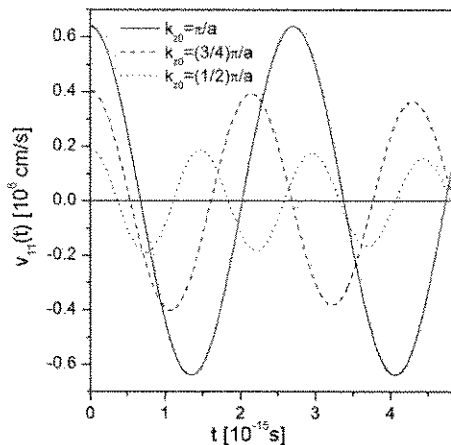
Wkład pracy autora: współudział w ustaleniu tematu, wykonanie obliczeń, wykonanie rysunków, współudział w dyskusji wyników, współudział w przygotowaniu tekstu.

W pracy analizowano wpływ potencjału periodycznego sieci krystalicznej na istnienie ZB. Obliczenia wykonano zarówno dla słabego potencjału periodycznego (metoda prawie swobodnych elektronów NFE), jak i dla silnego potencjału periodycznego w metodzie ciasnego wiązania (TB). W modelu NFE potencjał periodyczny powoduje powstanie nieskończonej liczby pasm energetycznych rozdzielonych przerwami. Uwzględniając dwa najniższe pasma otrzymuje się przybliżony Hamiltonian  $H_{\Delta}$  w postaci macierzy  $2 \times 2$ . Pokazano, że Hamiltonian ten nie komutuje z operatorem prędkości  $v_i = \partial H_{\Delta} / \partial p_i$ , gdzie  $p_i$  jest operatorem pędu w kierunku  $i$ . Obliczając dwukrotnie komutator operatora położenia  $z(t)$  z Hamiltonianem otrzymuje się równanie różniczkowe na pochodne czasowe  $z(t)$  ze współczynnikami operatorowymi niezależnymi od czasu. Rozwiązując równanie różniczkowe otrzymuje się

$$\underline{z}(t) = z_0 + v_{kz0}t + u_{\Delta} \Delta H_{\Delta}^{-1} t - \frac{1}{4} \hbar^2 A_0 \left[ \exp(-2iH_{\Delta}t/\hbar) - 1 \right] H_{\Delta}^{-2}.$$

W powyższym równaniu użyto oznaczeń z pracy. Ruch elektronu składa się z klasycznego ruchu prostoliniowego ze stałą prędkością (pierwsze dwa trzy), oraz szybko oscylującego

<sup>12</sup> X. Zhang i Z. Liu, Phys. Rev. Lett. **101**, 264303 (2008).



**Rys. 1: Oscylacje ZB pakietu gaussowskiego w modelu NFE. Parametry struktury pasmowej odpowiadają GaAs.**

Angstromów, czyli jest o ponad trzy rzędy wielkości większa niż amplituda oscylacji ZB w próżni  $\lambda_c = 0.00386 \text{ \AA}$ . Zatem wielkości charakteryzujące ruch Zitterbewegung w półprzewodnikach są znacznie łatwiej mierzalne eksperymentalnie niż dla ZB w próżni. W dalszej części pracy analizowano ruch pakietu gaussowskiego w modelu NFE. Oscylacje średniego położenia pakietu są obliczone numerycznie. Oscylacje ZB dla pakietu mają częstość rzędu szerokości przerwy energetycznej i amplitudę bliską stałej sieci krystalicznej. Pokazano, że częstość oscylacji słabo zależy od szerokości pakietu, natomiast amplituda oscylacji ZB zależy od parametrów pakietu i jest z reguły mniejsza od  $\lambda_Z$ .

Przeanalizowano przypadek silnego potencjału periodycznego w modelu TB przyjmując parametry opisujące CdTe i uwzględniając wyłącznie oddziaływanie pomiędzy najbliższymi sąsiadami. Pokazano, że w modelu TB operator prędkości nie komutuje z Hamiltonianem. Ruch pakietu został obliczony numerycznie. W wyniku otrzymano oscylacje ZB dla średniego położenia pakietu o częstości rzędu szerokości przerwy energetycznej i amplitudzie rzędu jednego Angstroma. Wyniki otrzymane w modelach NFE i TB wskazują na rolę potencjału periodycznego sieci krystalicznej w powstaniu ZB w ciałach krystalicznych. Na koniec, w modelu NFE wprowadzono transformację analogiczną do transformacji Foldy-Wouthuysena i pokazano, że miarą rozmycia funkcji falowej po transformacji jest  $\lambda_Z$ . Otrzymany wynik wskazuje na uniwersalność wielkości  $\lambda_Z$ , która zastępuje długość fali Comptona  $\lambda_c$  zarówno przy opisie Zitterbewegung, jak i przy transformacji Foldy-Wouthuysena.

ruchu opisywanego czwartym wyrazem. Wyraz ten jest bardzo podobny do wyrazu opisującego oscylacje ZB w równaniu Diraca. W modelu NFE oscylacje ZB mają częstość rzędu szerokości przerwy energetycznej  $2E_\Delta/\hbar$  i amplitudę rzędu  $\lambda_Z$ , będącą kombinacją stałej sieci, masy elektronu i składowej Fourierowskiej potencjału  $V_q$ . Dla półprzewodników energia przerwy  $2E_\Delta$  jest rzędu 0.2—3 eV, czyli jest o ponad pięć rzędów wielkości mniejsza od  $2m_0c^2 \approx 1\text{MeV}$  dla próżni. Typowa wartość  $\lambda_Z$  w półprzewodnikach przyjmuje wartości od jednego do kilkudziesięciu

Najważniejsze wyniki i sugestie:

- W najprostszycy modelach ciała stałego, zarówno słaby jak i silny potencjał periodyczny prowadzi do oscylacji ZB. Sugeruje to powszechność zjawiska ZB w ciałach krystalicznych.
- W modelu NFE równanie ruchu elektronu jest analogiczne do równania ruchu relatywistycznego elektronu w próżni. Uzasadnia to kojarzenie oscylacji trajektorii elektronu w modelu NFE z oscylacjami ZB dla relatywistycznego elektronu w próżni.
- W półprzewodnikach dla pakietu częstość oscylacji ZB jest rzędu szerokości przerwy energetycznej (podzielonej przez  $\hbar$ ), zaś amplituda oscylacji ZB zależy od szerokości pakietu oraz  $\lambda_Z$  i jest rzędu stałej sieci. Dlatego obserwacja ZB w półprzewodnikach może być znacznie łatwiejsza eksperymentalnie niż obserwacja ZB w próżni.

2) *T. M. Rusin i W. Zawadzki*

**“Transient Zitterbewegung of charge carriers in mono- and bilayer graphene, and carbon nanotubes”**

Physical Review B **76**, 195439 (2007) [7 stron].

DOI: 10.1103/PhysRevB.76.195439

37 cytowań (Web Of Science), Impact Factor = 3.172

Udział autora: 75%.

Wkład pracy autora: współudział w ustaleniu tematu, wykonanie obliczeń, wykonanie rysunków, współudział w dyskusji wyników, współudział w przygotowaniu tekstu.

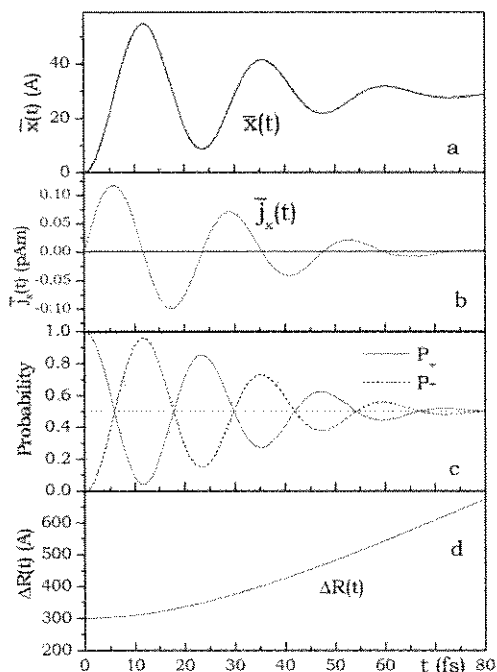
W pracy analizowano problem Zitterbewegung w trzech materiałach: podwójnej warstwie grafenu, pojedynczej warstwie grafenu oraz nanorurkach węglowych (CNT). Motywacją do podjęcia tematu było niedawne odkrycie grafenu oraz fakt, że Hamiltoniany elektronu w pojedynczej warstwie grafenu oraz w CNT są podobne do ultra-relatywistycznego Hamiltonianu Diraca. Ponadto spodziewano się, że oscylacje ZB w tych trzech materiałach będą posiadać parametry łatwiejsze do obserwacji niż oscylacje ZB w próżni. W odróżnieniu od oryginalnego podejścia Schrodingera, w pracy obliczono operator  $x(t)$  w obrazie Heisenberga  $x(t) = e^{iHt/\hbar} x e^{-iHt/\hbar}$ , traktując wyrażenie na  $x(t)$  jako iloczyn trzech operatorów. W przestrzeni pędowej Hamiltoniany elektronu w grafenie i nanorurkach są liczbowymi macierzami  $2 \times 2$ , co pozwala najpierw obliczyć eksponent Hamiltonianu  $e^{iHt/\hbar}$ , a następnie

cały iloczyn. W wyniku otrzymuje się operator  $x(t)$  będący macierzą  $2 \times 2$ , którą w kolejnym kroku uśrednia się względem gaussowskiego pakietu falowego.

Najważniejszym wynikiem z pracy jest równanie (5), które opisuje *analitycznie* ewolucję czasową pakietu gaussowskiego w podwójnej warstwie grafenu. Jeśli w chwili początkowej pakiet ma szerokość  $d$  i prędkość początkową  $\hbar k_{0y}/m^*$ , to

$$\bar{x}_z(t) = \frac{1}{k_{0y}} \left[ \exp\left(\frac{-\delta^4 d^2 k_{0y}^2}{d^4 + \delta^4}\right) \cos\left(\frac{-\delta^2 d^4 k_{0y}^2}{d^4 + \delta^4}\right) - \exp(-d^2 k_{0y}^2) \right],$$

gdzie  $\delta = (\hbar t/m^*)^{1/2}$  zawiera zależność czasową. Powyższe równanie jest dotąd *jedynym wzorem* opisującym *analitycznie* ruch drżący dla pakietu gaussowskiego. Wynikają z niego



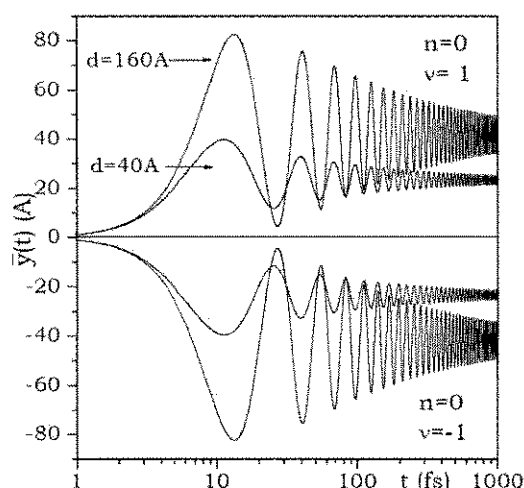
**Rys. 2:** Zitterbewegung elektronu w podwójnej warstwie grafenu dla pakietu gaussowskiego o szerokości  $d=300\text{Å}$  i  $k_{0y}=3.5 \times 10^8 \text{ m}^{-1}$ : (a) położenie, (b) prąd, (c) prawdopodobieństwo obsadzenia górnej i dolnej składowej funkcji falowej, (d) dyspersja  $\Delta R(t)$ . Czas zaniku  $\Gamma_z^{-1}=40 \text{ fs}$ .

następujące konsekwencje fizyczne dla ZB. Po pierwsze, dla pakietu falowego ZB zanika w czasie, gdyż dla dużych wartości  $\delta$  oba eksponenta znoszą się. Matematycznie, znikanie ZB dla dużych czasów jest konsekwencją twierdzenia Riemanna–Lebesgue’a. Po drugie, w grafenie oscylacje ZB zachodzą w kierunku prostopadłym do kierunku początkowego wektora falowego  $k_{0y}$ . Dla zerowej wartości  $k_{0y}$  nie ma oscylacji ZB. Po trzecie, częstość oscylacji ZB słabo zależy od szerokości pakietu  $d$ , ale silnie od wektora falowego  $k_{0y}$ . Ponieważ Hamiltonian elektronu w grafenie nie zawiera energii przerwy, która jest zerowa, jej rolę pełni tu odległość pomiędzy stanami o dodatniej i ujemnej wartości energii dla  $k_{0y}$ . Po czwarte, amplituda oscylacji zależy silnie od szerokości pakietu  $d$ . Fizyczną konsekwencją tych

zależności jest występowanie ZB jedynie w pewnym zakresie parametrów pakietu, a mianowicie, gdy iloczyn  $dk_{0y}$  jest rzędu jedności. Po piąte, dla szerokich pakietów (duże  $d$ ) otrzymuje się oscylacje w postaci  $x_z(t) \sim (1/k_{0y}) \cos(\delta^2 k_{0y}^2)$ . W tej granicy ruch ZB opisany jest przez nie zanikające oscylacje o amplitudzie  $(1/k_{0y})$  i częstości  $\omega_z = \hbar k_{0y}^2/m^*$ . Odpowiada to

sytuacji, gdy pakiet falowy jest bliski fali płaskiej  $e^{ikr}$ , dla której oscylacje ZB nie zanikają w czasie. Po szóste, w początkowej fazie ruchu ZB znika eksponencjalnie ze stałą zaniku  $\Gamma_Z = \hbar k_{0y} / (m^* d)$ . Dla podwójnej warstwy grafenu czas zaniku oscylacji ZB jest rzędu  $t_Z = 1/\Gamma_Z$  i wynosi kilkadziesiąt femtosekund. Opisanie własności ruchu ZB mają charakter ogólny i podobne wnioski można otrzymać z obliczeń numerycznych ruchu ZB w innych modelach.

W pracy pokazano, że czas rozplywania się pakietu falowego jest znacznie dłuższy od czasu zaniku oscylacji ZB. Zatem samo rozplywanie się pakietu falowego nie tłumaczy tak szybkiego zaniku oscylacji ZB. Mechanizmem fizycznym powodującym szybki zanik ZB jest oddalanie się od siebie pod-pakietów utworzonych ze stanów o dodatnich i ujemnych energiach. Ponieważ początkowy pakiet gaussowski nie jest stanem własnym Hamiltonianu, można go rozłożyć na dwa pod-pakiety składające się odpowiednio ze stanów o dodatnich i ujemnych energiach, a następnie obliczyć średnią prędkość ruchu obu pod-pakietów. W pracy pokazano, że pod-pakiety poruszają się w przeciwnych kierunkach ze względną prędkością  $\hbar k_{0y} / m^*$ . Oscylacje ZB występują wtedy, gdy pod-pakiety przekrywają się ze sobą, czyli kiedy ich środki oddalone są od siebie o mniej niż szerokość pakietu  $d$ . Zatem ZB powinno znikać po czasie rzędu  $t_Z = m^* d / (\hbar k_{0y}) = 1/\Gamma_Z$  otrzymanym poprzednio, który dla typowych wartości



**Rys. 3:** Zitterbewegung dla elektronu w dwóch najniższych pasmach nanorurki węglowej o średnicy  $L=200 \text{ \AA}$  dla dwóch pakietów gaussowskich o różnych szerokościach  $d$  i  $k_{0y}=0$ .

parametrów pakietu jest znacznie krótszy niż czas rozplynięcia się każdego z pod-pakietów. Wynik ten potwierdza ilościowo znaną wcześniej interpretację mówiącą, że ZB jest konsekwencją interferencji pod-pakietów składających się ze stanów o dodatnich i ujemnych energiach.

W pracy analizowano ruch ZB dla jednoatomowej warstwy grafenu i otrzymano wyniki podobne do wyników dla podwójnej warstwy grafenu. Wykonano też obliczenia dla nanorurek węglowych (CNT), w których ruch pakietu jest ograniczony do jednego wymiaru. Krzywizna nanorurki prowadzi do kwantowania ruchu w

kierunku prostopadłym do osi rurki, powodując "zamrożenie" niezerowej wartości pędu w tym kierunku. Dlatego dla CNT oscylacje ZB są możliwe nawet w przypadku zerowej



prędkości początkowej pakietu. Oscylacje ZB dla nanorurki są jakościowo różne od oscylacji ZB w grafenie. Ponieważ w CNT ruch może odbywać się jedynie w jednym kierunku (wzdłuż rurki), nie jest możliwe oddalanie się od siebie pod-pakietów w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu, więc pod-pakiety składające się ze stanów o dodatnich i ujemnych energiach przekrywają się aż do momentu całkowitego rozplątania się pakietu. Dlatego dla CNT oscylacje ZB zanikają bardzo wolno z czasem, zaś funkcja obwiedni tych oscylacji zanika jak  $t^{1/2}$ . W konsekwencji, dla CNT oscylacje ZB mogą być zaobserwowane nawet po kilku pikosekundach.

Najważniejsze wyniki i sugestie:

- Oscylacje ZB dla pakietu falowego zanikają w czasie, co jest konsekwencją twierdzenia Riemanna-Lebesgue'a.
- Zanik oscylacji ZB jest związany z oddalaniem się pod-pakietów złożonych ze stanów o dodatnich i ujemnych energiach. ZB istnieje gdy pod-pakiety przekrywają się ze sobą w przestrzeni.
- Oscylacje ZB istnieją jedynie w przypadku, gdy iloczyn  $dk_{0y}$  jest rzędu jedności.
- ZB w grafenie zanika po kilkudziesięciu femtosekundach, natomiast w CNT oscylacje ZB mogą istnieć nawet kilka pikosekund.

### 3) *T. M. Rusin i W. Zawadzki*

„Zitterbewegung of electrons in graphene in a magnetic field“

Physical Review B **78**, 125419 (2008) [9 stron].

DOI: 10.1103/PhysRevB.78.125419

33 cytowania (Web Of Science), Impact Factor = 3.322

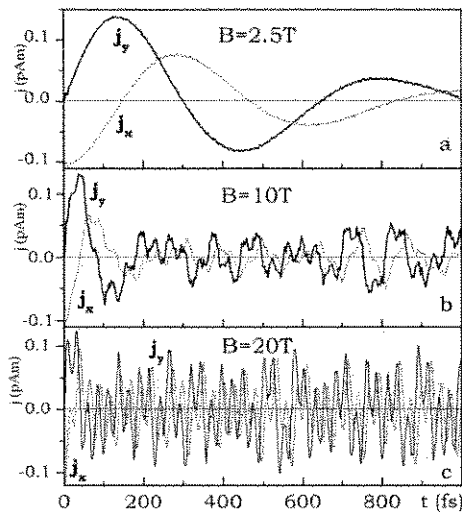
Udział autora: 75%.

Wkład pracy autora: współudział w ustaleniu tematu, wykonanie obliczeń, wykonanie rysunków, współudział w dyskusji wyników, współudział w przygotowaniu tekstu.

W pracy analizowano Zitterbewegung dla jednoatomowej warstwy grafenu umieszczonej w jednorodnym polu magnetycznym prostopadłym do warstwy. Pole magnetyczne powoduje całkowite kwantowanie ruchu elektronów. Przygotowując pakiet falowy zawierający zarówno stany o dodatnich jak i o ujemnych energiach (np. w formie pakietu gaussowskiego),

otrzymuje się ruch będący sumą drgań o częstościach wewnątrz-pasmowych oraz między-pasmowych interpretowanych jako ZB. W pracy obliczono oscylacje położenia pakietu w obrazie Heisenberga, uśredniając operatory  $x(t)$  oraz  $y(t)$  na pakiecie falowym  $|f\rangle$ . Przy obliczaniu średniej wartości operatora położenia  $\langle x(t) \rangle = \langle f | e^{iHt/\hbar} x e^{-iHt/\hbar} | f \rangle$ , wstawiono dwa razy operator jednostkowy  $I = \sum_{\underline{n}} |\underline{n}\rangle \langle \underline{n}|$ , gdzie  $|\underline{n}\rangle = |n, k_x, s\rangle$  jest stanem własnym Hamiltonianu elektronu w grafenie w polu magnetycznym. Obliczenie  $\langle x(t) \rangle$  wymaga wykonania całek po wektorach falowych  $k_x$  oraz sum po poziomach Landau'a w obu pasmach. Średnią wartość  $y(t)$  otrzymuje się w analogiczny sposób. Dla pakietu gaussowskiego w grafenie amplitudy składowych są analitycznymi funkcjami parametrów pakietu oraz długości magnetycznej  $L = (\hbar/eB)^{1/2}$ .

Obliczenia numeryczne prowadzą do następujących wniosków. Po pierwsze, dla niezerowego

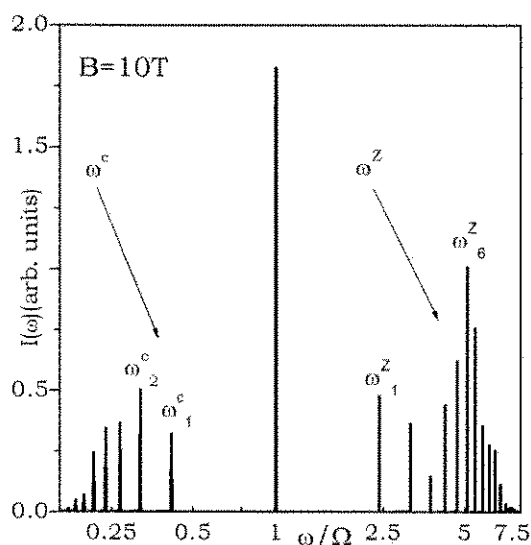


**Rys. 4: Zitterbewegung dla średniego prądu w grafenie obliczony dla sferycznego pakietu gaussowskiego o szerokości  $d_x=d_y=81 \text{ \AA}$  i wektora falowego  $k_{0x}=0.035 \text{ \AA}^{-1}$  dla trzech wartości pola magnetycznego.**

pola magnetycznego występuje nieskończona liczba drgań o częstościach wewnątrz-pasmowych  $\omega_n^c = \omega_{n+1} - \omega_n$  odpowiadających ruchowi cyklotronowemu, oraz o częstościach między-pasmowych  $\omega_n^z = \omega_{n+1} + \omega_n$  odpowiadających oscylacjom ZB. Dla przypomnienia, w grafenie bez pola magnetycznego występuje tylko jedna częstość ruchu ZB. Po drugie, ruch pakietu w polu magnetycznym nie zanika w czasie. Po trzecie, struktura oscylacji przedstawia nieskończony ciąg zdarzeń typu „collapse and revival”, czyli cyklicznego zaniku i odradzania się ruchu, analogicznie jak w przypadku oscylacji obsadzeń poziomów atomowych w optyce kwantowej.

Fizyczną przyczyną zanikania i odradzania się oscylacji pakietu jest ograniczenie ruchu pod-pakietów o dodatnich i ujemnych energiach przez pole magnetyczne, które nie pozwala żadnemu z pod-pakietów oddalić się zbyt daleko od środka ruchu (czyli od środka klasycznej orbity cyklotronowej). Oddalenie się od siebie pod-pakietów prowadzi do zaniku oscylacji, natomiast zbliżenie się pod-pakietów powoduje pojawienie się oscylacji ZB. Po czwarte, dla danego poziomu Landau'a  $n$  amplituda ruchu o częstościach  $\omega_n^z$  jest zawsze mniejsza od amplitudy drgań o częstościach  $\omega_n^c$ , co oznacza, że oscylacje ZB są zawsze słabsze od

oscylacji związanych z ruchem cyklotronowym. Po piąte, w praktyce sumy fourierowskie są dobrze przybliżone przez skończone sumy składające się od kilku do kilkudziesięciu składowych ruchu o największych amplitudach. Po szóste, pole magnetyczne zmienia jakościowo ruch pakietu i oscylacje ZB. Dla silnych pól ruch pakietu może przypominać ruch chaotyczny (ale wciąż o ściśle określonych częstościach), natomiast dla słabych pól ruch pakietu przypomina gładkie gasnące oscylacje z nałożonymi niewielkimi drganiami ZB. W zależności od natężenia pola trajektorie pakietu mogą przyjmować kształt gasnących i rozwijających się spiral lub też pozornie chaotycznych orbit. Techniczną trudnością przy obliczeniach ruchu pakietu w polu magnetycznym jest konieczność numerycznego obliczania wartości wielomianów Hermite'a dla dużych wartości  $n$  ( $n > 100$ ). Wymaga to użycia specjalnych metod numerycznych pozwalających przeprowadzić obliczenia z dokładnością do kilkuset cyfr znaczących.



**Rys. 5:** Widmo mocy promieniowania emitowanego przez elektronowy pakiet gaussowski w grafenie o szerokości  $d=81 \text{ \AA}$  i  $k_{0x}=0.035 \text{ \AA}^{-1}$  w ciągu pierwszych 20 ps ruchu w polu magnetycznym  $B=10 \text{ T}$ .

W dalszej części pracy analizowano promieniowanie wytworzone przez oscylujący pakiet falowy. Początkowy pakiet elektronowy posiada niezerowy moment dipolowy. Z uwagi na to, że pakiet nie jest stanem własnym układu (zawiera stany o różnych energiach), może on podczas ruchu emitować promieniowanie elektromagnetyczne. Zatem występowanie promieniowania o częstościach międzypasmowych  $\omega_h^Z$  w widmie emisyjnym pakietu może być dowodem na istnienie ruchu ZB o częstości  $\omega_h^Z$ . ZB odróżnia się od zwykłej luminescencji międzypasmowej określoną zależnością intensywności poszczególnych linii

widmowych  $\omega_h^Z$  dla różnych wartości parametrów pakietu i natężenia pola magnetycznego.

W pracy poddano analizie wpływ drugiego punktu K' w strefie Brillouina na oscylacje ZB pakietu. Omówiono wpływ zmiany cechowania pola magnetycznego na otrzymane wyniki oraz zaproponowano analityczne przybliżenie dla sum zawierających składowe fourierowskie ruchu ZB.

Najważniejsze wyniki i sugestie:

- Ruch pakietu gaussowskiego w polu magnetycznym składa się z nieskończonej liczby składowych o częstościach wewnątrz-pasmowych  $\omega_h^c = \omega_{h+1} - \omega_h$  oraz między-pasmowych  $\omega_h^z = \omega_{h+1} + \omega_h$  interpretowanych jako ZB. Przy braku pola występuje jedna częstość między-pasmowa.
- W grafenie dla niezerowego pola magnetycznego oscylacje ZB nie zanikają w czasie, ale pojawiają się sekwencje zdarzeń typu "collapse and revival".
- Charakter ruchu pakietu silnie zależy od natężenia pola magnetycznego.
- Oscylujący pakiet elektronowy emituje promieniowanie dipolowe o określonym natężeniu i częstotliwościach. Obserwacja przejść między-pasmowych i ich zależności od parametrów pakietu może potwierdzić występowanie oscylacji ZB w ruchu pakietu.

#### 4) T. M. Rusin i W. Zawadzki

„Theory of electron Zitterbewegung in graphene probed by femtosecond laser pulses“

Physical Review B **80**, 045416 (2009) [9 stron].

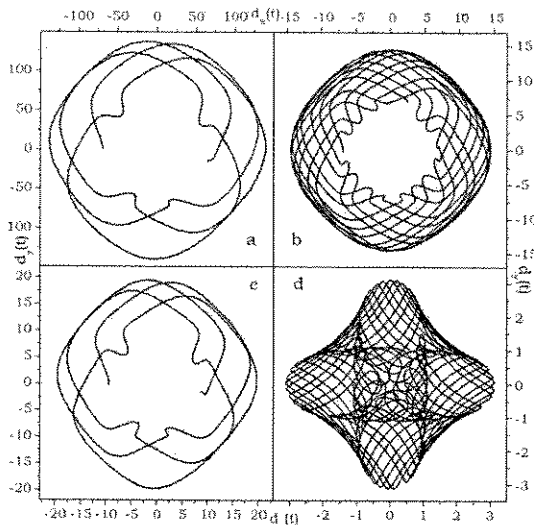
DOI: 10.1103/PhysRevB.80.045416

26 cytowania (Web Of Science), Impact Factor = 3.475

Udział autora: 75%.

Wkład pracy autora: współudział w ustaleniu tematu, wykonanie obliczeń, wykonanie rysunków, współudział w dyskusji wyników, współudział w przygotowaniu tekstu.

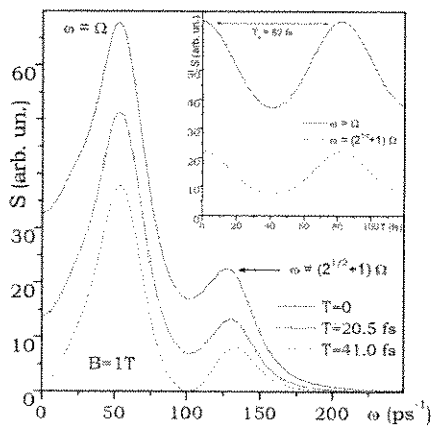
W pracy rozważano możliwość obserwacji ruchu ZB w pojedynczej warstwie grafenu w polu magnetycznym, oświetlonej krótkotrwałym impulsem laserowym. W modelu założono, że próbka jest warstwą grafenu domieszkowaną na typ  $p$ , umieszczoną w polu magnetycznym  $B < 40$  T prostopadłym do powierzchni. Przyjęto, że poziom Fermiego leży w paśmie walencyjnym w poziomie Landau'a  $n=-3$  lub niżej. Założono, że w chwili początkowej elektron znajduje się na poziomie  $n=-1$  (np. przez wcześniejsze pompowanie laserem cw lub wzbudzenie termicznie). Bardzo krótki (rzędu kilku femtosekund) puls lasera prowadzi do powstania pakietu falowego zawierającego składowe o dodatnich i ujemnych energiach. W wyniku pobudzenia stan elektronu staje się kombinacją stanów  $n=\pm 2$ ,  $n=-1$  oraz  $n=0$ , tworząc pakiet falowy zawierający składowe o energiach  $-2^{1/2}\hbar\omega$ ,  $-\hbar\omega$ ,  $0$ , oraz  $+2^{1/2}\hbar\omega$ . Amplitudy



**Rys. 6:** Oscylacje momentu dipolowego dla pakietu falowego utworzonego przez krótki puls laserowy w grafenie w polu magnetycznym. Parametry pulsu i układu na podstawie pracy "4".

to ruch drżący pakietu można pośrednio zaobserwować mierząc promieniowanie emitowane przez pakiet. W pracy założono, że promieniowanie jest emitowane przez jeden elektron i nie rozważano efektów związanych z emisją promieniowania przez wiele elektronów.

Zaproponowano dwie metody pomiaru promieniowania dipolowego wytwarzanego przez pakiet. W pierwszej metodzie założono pomiar mocy emitowanego promieniowania w funkcji



**Rys. 7:** Obliczone widmo mocy promieniowania pakietu falowego utworzonego krótkim pulsem laseru, dla trzech czasów  $T$  otwarcia bramki czasowej w metodzie Time Resolved Luminescence.

składowych pakietu zostały obliczone perturbacyjnie, traktując pole elektryczne lasera jako zaburzenie. Wykreowany pakiet nie jest pakietem gaussowskim rozważanym w poprzednich pracach, a jego kształt zależy od parametrów pulsu i natężenia pola magnetycznego. Po czasie dłuższym od czasu trwania pulsu pakiet ewoluuje w czasie, a ruch pakietu zawiera zarówno składowe o częstościach wewnątrz-pasmowych (np.  $\omega_1^c = \omega_2 - \omega_1$ ), jak i składowe o częstościach międzypasmowych (np.  $\omega_1^z = \omega_2 + \omega_1$ ) odpowiadające oscylacjom ZB. Ponieważ oscylujący pakiet elektronowy posiada niezerowy moment dipolowy,

dwóch zmiennych parametrów modelu: natężenia pola magnetycznego oraz czasu trwania pulsu laserowego. Dysponowanie dwoma zmiennymi parametrami eksperymentu może ułatwić odróżnienie ZB od innych efektów. Drugą zaproponowaną metodą jest pomiar zależności czasowej luminescencji (Time-Resolved Luminescence). W tej metodzie światło emitowane przez próbkę przechodzi przez dwa filtry: bramkę czasową otwartą przez czas  $T$  oraz filtr częstościowy wybierający częstości wokół pewnej wartości  $\omega_l$ . Następnie mierzy się natężenie promieniowania przechodzącego przez oba filtry w

funkcji czasu otwarcia bramki  $T$ . Obliczono teoretycznie taką zależność dla typowych parametrów filtrów i pokazano, że opisana metoda umożliwi identyfikację oscylacji ZB w próbce grafenu w polu magnetycznym.

W dalszej kolejności zwrócono uwagę na wpływ efektów rozpraszania występujących w próbkach grafenu na czas trwania oscylacji ZB. W szczególności, efekty rozpraszania pomiędzy elektronami powodują powstanie niewielkiej (kilka meV) przerwy energetycznej w strukturze pasmowej grafenu oraz poszerzenie poziomów Landau'a. Występowanie niezerowej przerwy energetycznej ma niewielki wpływ na oscylacje ZB. Natomiast poszerzenie poziomów energetycznych powoduje pojawienie się zespolonej częstości drgań  $\omega_n \rightarrow \omega_n - i\Gamma_n$ , gdzie  $\Gamma_n$  jest stałą zaniku oscylacji dla danego  $n$ . W konsekwencji, przy pewnych założeniach upraszczających, amplituda oscylacji ZB zanika wykładniczo z czasem i po ok. 400 fs oscylacje praktycznie znikają. W tym przypadku czas zaniku oscylacji zależy od parametrów próbki.

Najważniejsze wyniki i sugestie:

- Ultra-krótki impuls laserowy oświetlający warstwę grafenu w obecności pola magnetycznego wytwarza pakiet elektronowy, którego ruch zawiera oscylacje o częstościach cyklotronowych oraz o częstościach między-pasmowych, interpretowanych jako ZB.
- Drgający pakiet elektronowy posiada niezerowy i zmienny w czasie moment dipolowy, którego oscylacje prowadzą do emisji promieniowania elektromagnetycznego.
- Oscylacje o częstościach ZB mogą być, w zasadzie, zmierzone techniką "Time-Resolved Luminescence".
- Rozpraszanie elektronów w próbkach grafenu powoduje poszerzenie poziomów Landau'a, co prowadzi do wykładniczego zaniku oscylacji ZB.
- W pracy obliczono promieniowanie pochodzące od jednego elektronu i nie rozważano efektów związanych z emisją promieniowania dla wielu elektronów.

5) *W. Zawadzki i T. M. Rusin*

„Nature of electron Zitterbewegung in crystalline solids“

Physics Letters A **374**, 3533-3537 (2010).

DOI: 10.1016/j.physleta.2010.06.028

6 cytowań (Web Of Science), Impact Factor = 1.963

Udział autora: 50%.

Wkład pracy autora: wykonanie obliczeń dla modelu kwantowego, wykonanie rysunków, współudział w dyskusji wyników, współudział w przygotowaniu tekstu.

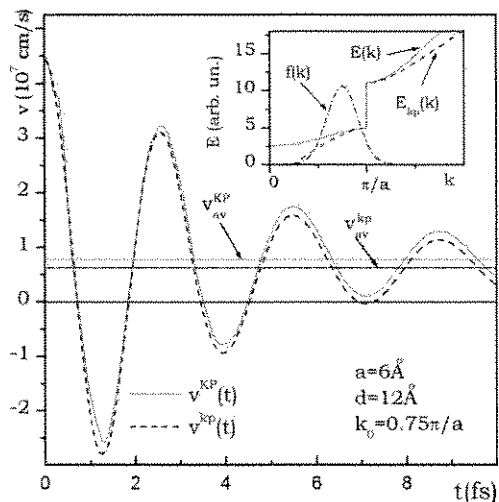
Dla wielu modeli struktury energetycznej ciała stałego, takich jak model dwupasmowy  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ , uproszczony model Kane'a, model Dimmocka dla soli ołowiu, grafen, Hamiltonian spinowy Rashby, oscylacje ZB otrzymuje się używając formalizm podobny do stosowanego przy obliczaniu ZB dla relatywistycznego elektronu w próżni. Podobieństwo formalizmu użytego do opisu ZB w dwóch różnych układach nie przekłada się jednak na podobną fizyczną przyczynę powstania ZB w ciałach krystalicznych i w próżni. W pracy wykazano, że oscylacje ZB w ciałach stałych są związane z istnieniem potencjału periodycznego sieci. Oscylacje ZB w ciałach krystalicznych wynikają ze zmiennej prędkości elektronu w obszarach silnego i słabego potencjału periodycznego wewnątrz komórki elementarnej sieci. W modelach struktury pasmowej ciała stałego potencjał periodyczny sieci nie występuje w jawnej postaci i jest on w pewnym sensie "ukryty" w elementach macierzowych operatora pędu oraz w przerwie energetycznej. Natomiast dla relatywistycznego elektronu w próżni nie występuje żaden potencjał periodyczny, a oscylacje ZB są wynikiem dwupasmowej struktury Hamiltonianu Diraca. Dlatego, pomimo formalnego podobieństwa do ZB w próżni, oscylacje ZB w ciałach krystalicznych mają inną naturę niż ZB w próżni.

Analizę wpływu potencjału periodycznego na istnienie ZB rozpoczęto od prostego modelu klasycznego. Potencjał periodyczny przyjęty został w kształcie piły o trójkątnych zębach. Jeżeli energia całkowita elektronu przewyższa maksymalną wartość potencjału, to elektron porusza się wzdłuż piły, a jego prędkość na przemian rośnie i maleje. Ruch ten można opisać przyjmując, że elektron porusza się ze stałą średnią prędkością, ale jego chwilowa prędkość oscyluje wokół średniej. Szybkie oscylacje prędkości odpowiadają oscylacjom ZB elektronu w sieci krystalicznej.

Opisany powyżej model wyjaśnia jakościowo naturę ruchu ZB w ciałach krystalicznych. Należy jednak wykazać ilościowo zgodność opisu ZB przez oscylacje prędkości w potencjale krystalicznym z oscylacjami ZB otrzymanymi w macierzowej metodzie  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ . Takie porównanie można przeprowadzić dla Hamiltonianu Kroniga-Penney'a. W tym modelu

można wprost obliczyć oscylacje prędkości pakietu. Można również rozwinąć Hamiltonian Kroniga-Penney'a w bazie funkcji Luttingera-Kohna (LK) i otrzymać przybliżony Hamiltonian  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$  w postaci skończonej macierzy opisującej  $n$  pasm energetycznych. Następnie w modelu  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$  można obliczyć średnią wartość operatora prędkości i porównać ją z wynikiem otrzymanym bezpośrednio z modelu Kroniga-Penney'a.

Opisany schemat zastosowano dla dwóch najniższych pasm w jednowymiarowym modelu



**Rys. 8:** Prędkości elektronu w sieci krystalicznej. Linie ciągłe: model Kroniga-Penney'a, linie kreskowane: dwupasmowy model  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ . Inset: struktura pasmowa w obu modelach dla  $k = \pi/a$ . Pakiet falowy jest scentrowany w  $k = 0.75 \pi/a$ .

Kroniga-Penney'a w pobliżu jednego z końców pierwszej strefy Brillouina. Otrzymany Hamiltonian  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$ , będący w tym przypadku macierzą  $2\times 2$ , nie komutuje z operatorem prędkości, co jest warunkiem koniecznym do powstania oscylacji ZB. Początkowy pakiet falowy rozwinięto w bazie LK, przy czym zaniedbano współczynniki rozwinięcia zawierające wkłady od wyższych pasm energetycznych. Ponieważ funkcje własne Hamiltonianu Kroniga-Penney'a są dane analitycznie, to można obliczyć elementy macierzowe operatora pędu pomiędzy stanami LK, wartość przerwy energetycznej oraz wszystkie elementy macierzy Hamiltonianu  $2\times 2$ . W pracy pokazano, że dla pakietu gaussowskiego

scentrowanego w okolicy końca strefy Brillouina, ruch pakietu obliczony w modelu dwupasmowym jest bardzo bliski ruchowi pakietu obliczonemu bezpośrednio z modelu Kroniga-Penney'a. Wynik ten uzasadnia postawioną w pracy tezę, że w ciałach krystalicznych ZB związany jest z oscylacjami prędkości elektronu w obszarach zmienności potencjału periodycznego. W obu przypadkach *chwilowa* prędkość elektronu oscyluje wokół prędkości średniej. Pokazano również, że *średnia* prędkość elektronu obliczona w modelu dwupasmowym jest bardzo bliska średniej prędkości otrzymanej w modelu Kroniga-Penney'a. Na koniec przeprowadzono analizę niewielkich różnic w wartościach prędkości otrzymanych w modelu Kroniga-Penney'a i w modelu dwupasmowym.

Najważniejsze wyniki i sugestie:



- Pomimo formalnego podobieństwa pomiędzy ZB w ciałach stałych i ZB w próżni, w obu przypadkach natura tego zjawiska jest różna.
- Ruch Zitterbewegung elektronu w ciałach krystalicznych wynika z istnienia potencjału periodycznego. Elektron zwalnia lub przyspiesza w zależności od wartości potencjału periodycznego w różnych punktach przestrzeni.
- Obliczenia numeryczne dla modelu Kroniga-Penney'a oraz przybliżonego modelu dwupasmowego  $k \cdot p$  potwierdzają powyższą tezę.

**6) W. Zawadzki i T. M. Rusin**

**„Zitterbewegung (trembling motion) of electrons in semiconductors: a review”**

J. Phys.: Condens. Matter **23**, 143201 (2011) [19 stron].

DOI: 10.1088/0953-8984/23/14/143201

16 cytowania (Web Of Science), Impact Factor = 2.546

Udział autora: 50%.

Wkład pracy autora: wykonanie przeglądu literatury, współudział w wyborze omówionych prac, wykonanie rysunków, współudział w dyskusji, współudział w przygotowaniu tekstu.

Praca jest przeglądem badań zjawiska Zitterbewegung w półprzewodnikach i innych układach periodycznych przeprowadzonym na początku roku 2011. Zebrano i usystematyzowano wyniki ok. 70 prac dotyczących Zitterbewegung w ciele stałym, układach atomowych i zjawiskach falowych. W pracy, opartej w znacznej mierze na wynikach prac autorów, opisano i wyjaśniono główne aspekty problemu Zitterbewegung: podejście operatorowe wprowadzone przez Schrodingera, oscylacje pakietu falowego, znaczenie interferencji między stanami o dodatnich i ujemnych energiach, najważniejsze wyniki dla grafenu i innych prostych systemów, rolę potencjału periodycznego dla ZB w ciałach stałych i możliwości obserwacji ZB. Ponadto usystematyzowano wyniki dla ZB w teorii transportu w ciałach stałych, w zjawiskach falowych oraz w układach relatywistycznych. Osobna część poświęcona została możliwościom symulacji ZB w układach falowych, atomowych, jonowych i w super-sieciach optycznych. Praca spotkała się z dużym zainteresowaniem i została ściągnięta ponad 500 razy ze strony internetowej IOP. Na początku września 2012 praca została wybrana przez wydawców IOP jako jedna z najważniejszych prac z lat 2010-2011, do których IOP zapewnił bezpłatny dostęp internetowy.

7) *T. M. Rusin i W. Zawadzki*

**„Zitterbewegung of relativistic electrons in a magnetic field and its simulation by trapped ions“**

Phys. Rev. D **82**, 125031 (2010) [20 stron].

DOI:10.1103/PhysRevD.82.125031

11 cytowań (Web Of Science), Impact Factor = 4.964

Udział autora: 75%.

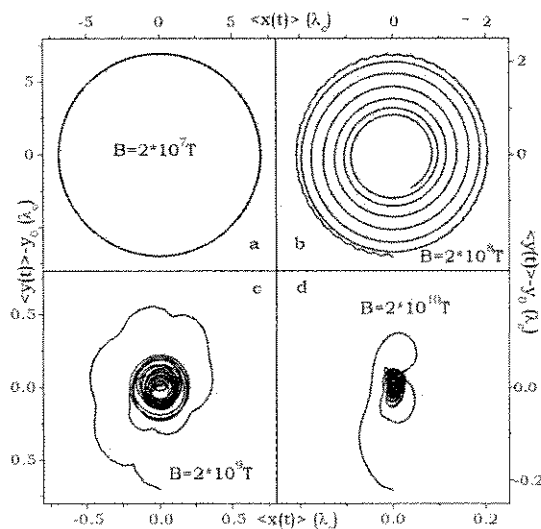
Wkład pracy autora: współudział w ustaleniu tematu, wykonanie obliczeń, wykonanie rysunków, współudział w dyskusji wyników, współudział w przygotowaniu tekstu.

W pracy analizowano ruch drżący elektronu Diraca w jednorodnym polu magnetycznym. Problem ten był rozważany w 1985 roku przez Baruta i Thackera<sup>4</sup>, którzy podali równania ruchu dla elektronu Diraca w polu magnetycznym używając formalizmu czasu własnego (proper time). Otrzymane wyniki mają skomplikowaną strukturę algebraiczną. Przewidują one występowanie dwóch częstości oscylacji ZB i dwóch częstości oscylacji cyklotronowych. Jeśli rozszczepienie poziomów cyklotronowych w polu magnetycznym przewyższa wartość  $2m_0c^2$  (czyli  $B > 4.4 \times 10^9$  T), to dwie z czterech częstości stają się urojone, a w ruchu elektronu pojawiają się składowe rozbiegające się eksponencjalnie w czasie. Wynik ten jest jakościowo różny od przewidywań autora i Zawadzkiego dla elektronu w grafenie w polu magnetycznym (praca "3" obecnego cyklu), gdzie ruch elektronu składa się z nieskończenie wielu składowych o częstościach cyklotronowych i między-pasmowych (oscylacje ZB), bez żadnych osobliwości w całym zakresie pól magnetycznych. W granicy  $2m_0c^2 \rightarrow 0$  Hamiltonian elektronu w grafenie jest podobny do Hamiltonianu dwuwymiarowego elektronu Diraca. Zatem dla  $2m_0c^2 \rightarrow 0$  zależność czasowa położenia elektronu relatywistycznego powinna być podobna do zależności czasowej położenia elektronu w grafenie. Jednakże, w tej granicy wyniki obu modeli są istotnie różne. Rozbieżność ta skłoniła autora i Zawadzkiego do powtórnego przeanalizowania zagadnienia ZB dla relatywistycznego elektronu w próżni.

W pierwszej części pracy analizowano ewolucję czasową uogólnionych operatorów kreacji  $A^+$  i anihilacji  $A$  dla stanów elektronu w polu magnetycznym opisywanych równaniem Diraca. Operatory położenia  $X$  oraz  $Y$  są liniową kombinacją operatorów  $A^+$  oraz  $A$ . Obliczając dwukrotnie komutatory  $A^+(t)$  i  $A(t)$  z Hamiltonianem otrzymuje się równania różniczkowe na drugie pochodne czasowe  $A^+(t)$  oraz  $A(t)$ . Rozwiązania tych równań dają zależność czasową

dla  $A^+(t)$ ,  $A(t)$  oraz  $X(t)$  i  $Y(t)$ . Są one analitycznymi funkcjami operatorów  $H$ ,  $A^+(0)$  oraz  $A(0)$  i nie mają osobliwości dla żadnej wartości pola magnetycznego. Stanowią one formalne i ściśle rozwiązanie równań ruchu elektronu w polu magnetycznym w formie operatorowej. Oscylacje położenia są wynikiem interferencji *czterech* pod-pakietów, a nie dwóch, jak w przypadku zerowego pola. Ruch elektronu zawiera nieskończoną liczbę składowych o częstościach wewnątrz-pasmowych  $\omega_{n,kz}^c = (E_{n+1,kz} - E_{n,kz})/\hbar$  opisujących ruch cyklotronowy, oraz nieskończoną liczbę składowych o częstościach między-pasmowych  $\omega_{n,kz}^z = (E_{n+1,kz} + E_{n,kz})/\hbar$  opisujących oscylacje ZB. Dla danego poziomu Landau'a  $n$ , amplitudy ruchu cyklotronowego są większe od amplitud oscylacji ZB. W silnych polach magnetycznych amplitudy obu składowych ruchu są podobne, ale słabych pól amplitudy składowych cyklotronowych przewyższają amplitudy składowych ZB o wiele rzędów wielkości. Dlatego w polach magnetycznych dostępnych obecnie w laboratoriach nie jest możliwe zaobserwowanie oscylacji ZB dla elektronów w próżni.

W dalszej części pracy obliczono ewolucję czasową pakietu gaussowskiego dla elektronu Diraca w polu magnetycznym. Średnią wartość operatorów położenia  $\langle x(t) \rangle$  oraz  $\langle y(t) \rangle$  na pakiecie  $|f\rangle$  obliczono w obrazie Heisenberga. Wstawiono dwukrotnie operator jednostkowy  $I = \sum_{\underline{n}} |\underline{n}\rangle \langle \underline{n}|$ , gdzie  $|\underline{n}\rangle = |n, k_x, k_y, \varepsilon, s\rangle$  jest stanem własnym relatywistycznego elektronu w polu



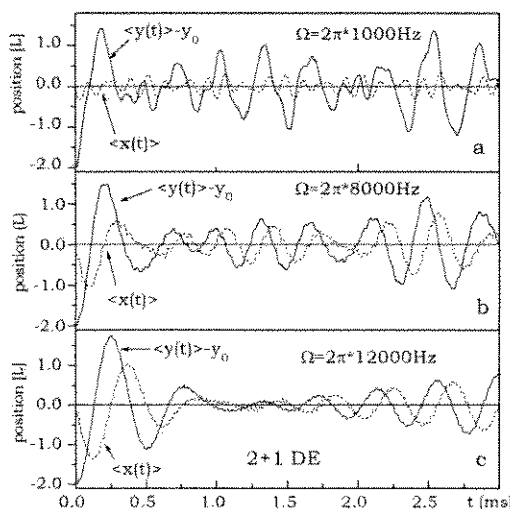
**Rys. 9: Trajektorie elektronu Diraca przygotowanego w postaci pakietu gaussowskiego obliczonych dla czterech wartości pola magnetycznego w 3D. Parametry pakietów podane są pracy "7".**

magnetycznym, opisanym pięcioma liczbami kwantowymi. Sumowanie po liczbach kwantowych  $\varepsilon$ ,  $s$  oraz całkowanie po  $k_x$  zostało wykonane analitycznie, natomiast sumowanie po poziomach Landau'a oraz całkowanie po  $k_z$  wymaga obliczeń numerycznych. Użyto procedur numerycznych o bardzo wysokiej precyzji obliczeń (kilkaset cyfr znaczących). Dla uniknięcia przypadkowych symetrii analizowano eliptyczny pakiet gaussowski o podobnych, choć niewspółmiernych osiach głównych elipsy. Założono że w chwili początkowej spinor opisujący pakiet falowy ma jedną lub dwie niezerowe składowe. W trzech wymiarach ruch

pakietu ma charakter gasnący, natomiast w dwóch wymiarach oscylacje mają charakter trwały

i, podobnie jak dla ruchu elektronu w grafenie w polu magnetycznym, nie zanikają w czasie. Obliczono ewolucję czasową poszczególnych składowych wektora położenia dla różnych wartości natężenia pola magnetycznego i parametrów pakietu. Obliczono trajektorię pakietu oraz znaleziono optymalne kombinacje parametrów modelu prowadzące do powstania oscylacji ZB: silne pole magnetyczne (energia cyklotronowa rzędu  $2m_0c^2$ ), porównywalna skala  $d_x$ ,  $d_y$ ,  $d_z$  (szerokości pakietu w trzech kierunkach), długości magnetycznej  $L=(eB/\hbar)^{1/2}$  oraz odwrotności  $k_{0x}$ . Ciekawym wynikiem jest zależność trajektorii ruchu pakietu od natężenia pola magnetycznego. W słabych polach (w tym problemie pole  $B=2\times 10^7$  T uważane jest za słabe) trajektorią pakietu jest klasyczna orbita cyklotronowa. Dla pól przewyższających pole Schwingera  $B=4.4\times 10^9$  T trajektoria pakietu staje się nieregularną i gasnącą spiralą. W słabych polach ZB dalej istnieje, ale jego amplituda jest wiele rzędów wielkości mniejsza od amplitudy ruchu cyklotronowego, a oscylacje ZB nie są widoczne.

Dalsza część pracy poświęcona jest możliwości symulacji ZB dla Hamiltonianu Diraca przy użyciu jonów atomowych w tzw. pułapkach magnetycznych. Inspiracją tej części pracy był eksperyment przeprowadzony przez Gerritsmę i innych<sup>10</sup>, którzy symulowali jednowymiarowy Hamiltonian Diraca i zaobserwowali oscylacje Zitterbewegung dla pakietu falowego. W niniejszej pracy zaproponowano sposób symulacji dwuwymiarowego równania



**Rys. 10: Obliczony ruch pakietu falowego przy symulacji dwuwymiarowego równania Diraca w pułapkach jonowych  $^{40}\text{Ca}^+$  dla trzech wartości symulowanej energii przerwy  $\hbar\Omega$**

Diraca dla elektronu w polu magnetycznym. Przyjmując parametry pułapki magnetycznej z pracy Gerritsmy i innych<sup>10</sup>, obliczono ZB dla pakietu falowego odpowiadające różnym wartościom symulowanego pola magnetycznego. Otrzymane rezultaty potwierdzają możliwość symulacji ZB w zaproponowanym układzie.

Najważniejsze wyniki i sugestie:

- Ruch elektronu Diraca w polu magnetycznym składa się z nieskończonej liczby oscylacji o częstościach cyklotronowych oraz nieskończonej liczby oscylacji o częstościach między-pasmowych,

interpretowanych jako ZB. Dla trzech wymiarów oscylacje zanikają w czasie,

natomiast w dwóch wymiarach oscylacje mają charakter trwały i pojawiają się sekwencje typu „collapse and revival”.

- Otrzymane wyniki opisują ruch elektronu (pakietu) Diraca dla dowolnego natężenia pola magnetycznego i nie mają osobliwości w całym zakresie pól magnetycznych.
- W granicy słabego pola amplituda oscylacji ZB jest wiele rzędów wielkości mniejsza od amplitudy oscylacji cyklotronowych, więc w słabych polach oscylacje ZB są niewidoczne.
- Można rozwiązać dokładnie i analitycznie równanie ruchu dla operatorów położenia dla elektronu Diraca w polu magnetycznym.
- Można symulować ZB dla dwuwymiarowego Hamiltonianu Diraca w polu magnetycznym przy użyciu techniki jonów atomowych w pułapkach magnetycznych.

#### 8) *T. M. Rusin i W. Zawadzki*

**„Zitterbewegung of Klein-Gordon particles and its simulation by classical systems“**

Phys. Rev. A **86**, 032103 (2012) [15 stron]

DOI: 10.1103/PhysRevA.86.032103

0 cytowań (Web Of Science), Impact Factor =2.878

Udział autora: 75%.

Wkład pracy autora: współudział w ustaleniu tematu, wykonanie obliczeń, wykonanie rysunków, współudział w dyskusji wyników, współudział w przygotowaniu tekstu.

Jednym z problemów utrudniających zaobserwowanie ZB dla elektronów w próżni jest istnienie morza Fermiego i związanych z nim efektów wielo-ciałowych (np. kreacja par elektronowo-dziurowych). Trudności te nie występują przy pomiarze ZB dla bozonów w próżni, gdy nie występuje morze Fermiego ani inne efekty związane ze statystyką fermionów. W pracy rozpatrzono ZB dla bozonów o spinie zero i ładunku  $\pm|e|$  opisanych równaniem Kleina-Gordona (KG). Problem ten był rozważany w literaturze dla ZB w formie operatorowej bez pola magnetycznego<sup>13,14</sup>. W niniejszej pracy zajmowano się nowymi aspektami zjawiska ZB dla równania KG: ruchem pakietu gaussowskiego, zanikiem oscylacji w czasie, porównaniem ZB w formalizmie falowym i Hamiltonowym, analizą ZB w polu magnetycznym i możliwością symulacji ZB w układach mechanicznych.

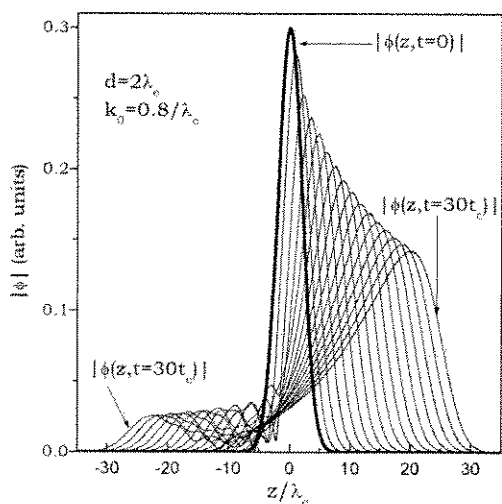
---

<sup>13</sup> R. F. Guertin i E. Guth, Phys. Rev. D **7**, 1057 (1973).

<sup>14</sup> M. G. Fuda i E. Furlani, Am. J. Phys. **50**, 545 (1982).

W literaturze równanie KG występuje pod dwiema postaciami: jako równanie różniczkowe drugiego rzędu względem czasu, podobne do równania falowego z dodatkowym wyrazem zawierającym masę cząstki, oraz jako równanie pierwszego rzędu względem czasu przypominające równanie Schrodingera, w którym operator Hamiltona jest macierzą  $2 \times 2$ . Model Kleina-Gordona umożliwia obliczenie oscylacji ZB zarówno przy użyciu równań ruchu Heisenberga, jak i ujęciu falowym. Specyfiką równania KG są trudności w definicji operatora położenia dla cząstki o spinie zero. Dlatego w pracy zajmowano się własnościami operatorów gęstości prądu i prędkości cząstki, które są dobrze zdefiniowane dla równania KG.

Na początku analizowano ruch swobodnej cząstki o spinie zero używając operatora prędkości w obrazie Heisenberga. Następnie obliczono średnią wartość operatora prędkości uśrednioną na pakiecie gaussowskim. W modelu KG oscylacje ZB powstają w wyniku interferencji dwóch pod-pakietów składających się ze stanów o dodatnich i ujemnych energiach. Pod-pakiety poruszają się w kierunku równoległym do kierunku początkowego wektora falowego pakietu z różnymi prędkościami, co powoduje zanik oscylacji ZB w czasie. Dla przypomnienia, w grafenie pakiety rozchodzą się prostopadle do kierunku początkowego wektora falowego pakietu. Nie wyjaśnioną własnością ruchu cząstki o spinie zero jest



**Rys. 11: Ewolucja czasowa wartości bezwzględnej jednowymiarowego gaussowskiego pakietu falowego dla falowego równania KG. Pakiet rozpada się na dwa pod-pakiety poruszające się z różnymi prędkościami.**

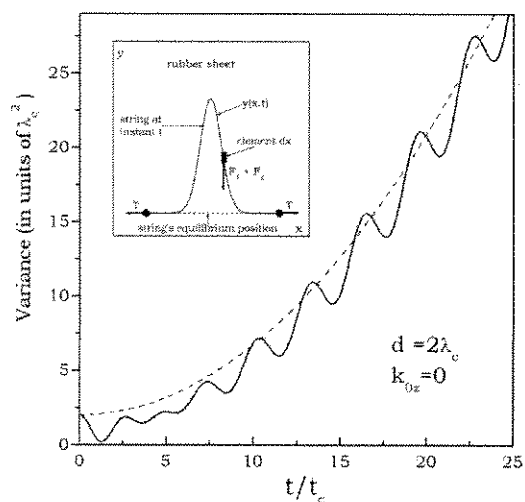
wraz z odpowiednio zmienionymi warunkami początkowymi. Należy także

pokazana w pracy możliwość przekroczenia prędkości światła przez cząstkę w granicy dużych wartości pędu. Równanie Diraca nie ma podobnej własności; pokazano, że prędkość elektronu Diraca nie może przekroczyć prędkości światła dla żadnej wartości pędu.

Następnym zagadnieniem analizowanym w pracy jest porównanie oscylacji ZB dla pakietu falowego w reprezentacji Hamiltona z ruchem pakietu falowego opisanego równaniem falowym KG. Przejście z reprezentacji falowej równania KG do postaci Hamiltonowej jest równoważne zamianie równania różniczkowego drugiego rzędu na układ dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu,

przetransformować pakiet falowy z reprezentacji falowej do reprezentacji Hamiltonowej. Po dokonaniu obu transformacji i obliczeniu średniej wartości operatora prądu w obu reprezentacjach otrzymano identyczne wyniki. Równoważność opisu Hamiltonowego i falowego zachodzi więc dla *średnich* wartości operatorów prądu i prędkości cząstki.

W dalszej części pracy analizowano ruch pakietu falowego dla równania KG w jednorodnym polu magnetycznym. Otrzymano ruch składający się z nieskończonej sumy składowych o częstościach cyklotronowych i nieskończonej sumy składowych o częstościach międzypasmowych. W granicy słabych pól ruch pakietu redukuje się do klasycznego ruchu cyklotronowego, natomiast w silnych polach ruch cząstki przypomina chaotyczne oscylacje. W silnych polach magnetycznych składowe ZB dają znaczny wkład do ruchu pakietu, natomiast dla słabych pól (w stosunku do pola Schwingera dla cząstki o masie  $m$ ) ich wkład jest zaniedbywalny. Analizę przeprowadzono dla eliptycznego pakietu gaussowskiego. Obliczając trajektorię ruchu pakietu otrzymuje się ciągłe przejście od ruchu cyklotronowego dla słabych pól do nieregularnych gasnących spiral w silnych polach. Poddano też w sposób analityczny i ścisły rozwiązanie równania ruchu w obrazie Heisenberga dla operatorów gęstości prądu w polu magnetycznym.



**Rys. 12: Wariacja kształtu pakietu w modelu symulującym ZB w równaniu KG. Linia ciągła: całkowita wariancja, linia przerywana: nie-oscyłująca część wariacji. Dla modelu z pracy „8” otrzymuje się  $\lambda_c=4.47$  mm oraz  $t_c=2.37 \times 10^{-5}$ s.**

W ostatniej części pracy rozważono symulację zjawiska ZB przez inne układy fizyczne. Wspomniana powyżej (patrz praca „7”) metoda symulacji równania Diraca przy pomocy pułapek jonowych nie jest przydatna dla Hamiltonianów zawierających wyższe potęgi operatora pędu. Dlatego w pracy zaproponowano inny układ umożliwiający symulację ZB dla równania KG. Prostym układem opisywanym równaniem KG w postaci falowej jest model zaproponowany przez Morse’a i Feshbacha<sup>15</sup>. W tym układzie metalowa struna (np. od fortepianu) przymocowana jest w płaszczyźnie  $x$ - $y$  do cienkiego arkusza gumy. Jeśli struna naprężona jest w kierunku  $x$ , i wstępnie

<sup>15</sup> P. M. Morse i H. Feshbach *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill, New York, 1953).

wygięta (np. w kształcie funkcji Gaussa) w kierunku  $y$ , to po zwolnieniu zaczyna ona drgać w kierunku  $y$  w sposób opisany falowym równaniem KG. Pokazano, że wariancja kształtu struny wykonuje drgania analogiczne do drgań ZB cząstki relatywistycznej o spinie zero. Dla typowych parametrów struny fortepianowej i gumy, częstotliwość drgań jest rzędu 13 kHz, czyli leży w zakresie słyszalności ludzkiego ucha.

Najważniejsze wyniki i sugestie:

- Zitterbewegung dla relatywistycznej naładowanej cząstki o spinie zero jest wynikiem interferencji dwóch pod-pakietów o dodatnich i ujemnych energiach i rozchodzącymi się z różnymi prędkościami w kierunku równoległym do kierunku początkowego wektora falowego pakietu.
- Średnie wartości operatorów prędkości lub prądu obliczone dla pakietu falowego w formalizmie Hamiltona są równe średnim wartościom prędkości lub prądu otrzymanymi dla pakietu falowego w formalizmie falowym.
- Dla słabych pól magnetycznych ruch naładowanej cząstki o spinie 0 jest ruchem cyklotronowym o zanedbywalnie małej składowej ZB. Dla silnych pól magnetycznych składowe ZB ruchu są porównywalne do składowych cyklotronowych.
- Równanie ruchu dla swobodnej cząstki KG dopuszcza teoretycznie możliwość przekroczenia prędkości światła przez cząstkę. Przyczyna występowania tej możliwości w teorii KG jest niejasna. W równaniu Diraca podobna możliwość nie występuje.
- Oscylacje ZB mogą być symulowane przez prosty model mechaniczny. W odpowiednich warunkach oscylacje wariancji kształtu struny symulują oscylacje ZB cząstki o zerowym spinie w próżni.

## Podsumowanie

W chwili obecnej stan zrozumienia zjawiska Zitterbewegung jest następujący:

1. W układzie występuje zjawisko ZB, gdy wartości własne Hamiltonianu tworzą przynajmniej dwa pasma energetyczne. Hamiltonian  $H$  nie komutuje wtedy z operatorem prędkości  $v_i = \partial H / \partial p_i$ , (gdzie  $\mathbf{p}$  jest pędem cząstki). W takiej sytuacji, *także pod nieobecność sił zewnętrznych*, prędkość cząstki zmienia się w czasie, a oprócz ruchu jednostajnego prostoliniowego pojawiają się oscylacje prędkości i położenia cząstki.



2. Oscylacje ZB pojawiają się najczęściej w układach posiadających dwa pasma oddzielone przerwą energetyczną, jak ma to miejsce dla Hamiltonianów Diraca, Kleina-Gordona, modelu dwupasmowego  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$  w półprzewodnikach. Zjawisko ZB jest możliwe także przy większej liczbie pasm energetycznych: w modelu Kane'a, Kroniga-Penney'a i innych oraz w przypadku dwóch pasm i zerowej przerwy energetycznej (np. dla grafenu).
3. ZB objawia się istnieniem składowej ruchu oscylującej z częstością między-pasmową. Zwykle amplituda ZB jest mała, więc ZB można sobie wyobrazić jako niewielkie oscylacje wokół klasycznej trajektorii cząstki.
4. Dla pakietu falowego ZB powstaje w wyniku interferencji pomiędzy pod-pakietami składającymi się ze stanów o dodatnich i ujemnych energiach. Jeśli pod-pakiety oddalają się od siebie i przestają przekrywać, znikają także oscylacje ZB.
5. W większości przypadków oscylacje ZB pakietu falowego zanikają w czasie. Matematycznie jest to konsekwencją twierdzenia Riemanna-Lebesgue'a. Do fizycznych procesów odpowiadających za zanik ZB zaliczyć trzeba: oddalanie się pod-pakietów, rozptywanie się pakietu w czasie, poszerzenie poziomów energetycznych oraz efekty związane z wypromieniowywaniem energii przez oscylujący moment dipolowy pakietu.
6. W niektórych przypadkach możliwe są oscylacje ZB nie zanikające w czasie (np. ruch pakietu falowego w grafenie w polu magnetycznym lub ruch elektronu Diraca w polu magnetycznym w dwóch wymiarach). Pojawia się wtedy nieskończona sekwencja zdarzeń typu "collapse and revival".
7. Fizyczną przyczyną występowania ZB elektronów lub dziur w ciałach krystalicznych jest obecność periodycznego potencjału sieci krystalicznej, który zmienia chwilową prędkość poruszającej się cząstki. W formalizmie macierzy  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$  potencjał periodyczny nie występuje w sposób jawny, lecz jest "ukryty" w elementach macierzowych operatora pędu i w przerwie energetycznej. Fizycznym "śladem" istnienia potencjału periodycznego w formalizmie macierzowym  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$  jest brak komutacji Hamiltonianu oraz operatora prędkości cząstki.
8. Przyczyną występowania ZB w próżni jest występowanie dwóch pasm energetycznych w Hamiltonianach Diraca i Kleina-Gordona. Dlatego ZB w próżni ma *inną naturę* niż ZB w ciałach krystalicznych. Natomiast matematycznie zjawisko ZB w próżni i w ciałach krystalicznych może być opisane przy użyciu podobnego formalizmu.
9. Zitterbewegung występuje także przy zjawiskach falowych, gdy układ jest periodyczny i dyspersja  $\alpha(k)$  składa się z przynajmniej dwóch pasm. Oscylacje średniej prędkości lub

średniego położenia pakietu falowego o częstościach odpowiadających energii przerwy są analogiczne do zjawiska ZB dla elektronu w próżni lub w ciałach krystalicznych.

10. Pod nieobecność pola magnetycznego amplituda oscylacji ZB dla elektronu w próżni jest rzędu długości fali Comptona  $\lambda_c$ . W strukturach krystalicznych rolę tej wielkości pełni  $\lambda_z$ , która może przyjmować wartości dziesiątek Angströmów. W przypadku ruchu pakietu falowego, amplituda oscylacji zależy także od szerokości pakietu i przeważnie jest ona mniejsza od  $\lambda_z$ .
11. Ruch pakietu w polu magnetycznym zawiera wiele składowych o częstościach cyklotronowych oraz wiele składowych o częstościach między-pasmowych, które opisują oscylacje ZB pakietu. Dla danego poziomu Landau'a, amplituda oscylacji ZB jest zawsze mniejsza od amplitudy oscylacji ruchu cyklotronowego. Dla elektronu Diraca lub bezspinowej cząstki Kleina-Gordona w silnych polach magnetycznych amplitudy obu ruchów są porównywalne. Dla słabych pól amplituda oscylacji ZB jest natomiast wiele rzędów wielkości mniejsza od amplitudy ruchu cyklotronowego. Dla elektronu w grafenie w polu magnetycznym oscylacje ZB mają amplitudę porównywalną do amplitudy oscylacji cyklotronowych w całym zakresie pól.
12. Oscylacje ZB mogą być symulowane przez inne układy: pułapki jonowe lub atomowe, super-sieci optyczne, modele mechaniczne. We wszystkich tych układach można symulować oscylacje pakietu w korzystniejszych warunkach eksperymentalnych niż dla próżni. Jednak dotychczas nie udało się zaobserwować ZB dla elektronu w ciałach stałych. Trudność polega bądź na konieczności obserwacji ruchu pojedynczego elektronu, bądź na konieczności przygotowania wielu elektronów oscylujących w fazie.

## **5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo - badawczych (artystycznych).**

***T. M. Rusin i W. Zawadzki***

**„Quantum theory of symmetric screening in the Hartree approximation”**

Phys. Stat. Sol. (b) **243**, 1286–1295 (2006).

Udział autora: 75%

W pracy analizowano problem oddziaływania dwóch ładunków elektrycznych w gazie elektronowym w przybliżeniu Hartree. W standardowym podejściu zakłada się, że jeden ładunek (np. jon donora) polaryzuje gaz elektronowy, a drugi ładunek porusza się w ekranowanym potencjale pierwszego ładunku bez zaburzenia potencjału (czyli drugi ładunek

jest dowolnie małym ładunkiem próbnym). Opisane podejście jest koncepcyjnie niespójne, jeśli oba ładunki mają taką samą wartość bezwzględną, jak ma to miejsce w teorii ekranowanego donora. W takim przypadku wprowadzenie pojęcia ładunku próbnego traci sens, ponieważ oba ładunki polaryzują gaz elektronowy w taki sam sposób. Dlatego w pracy obliczono energię oddziaływania pomiędzy ładunkami traktując problem symetrycznie, tzn. uwzględniając polaryzację gazu elektronowego przez *oba* ładunki. Uwzględniając wszystkie wkłady do energii układu, w szczególności zmianę energii ekranującego gazu elektronowego, oraz obliczając w sposób samo-uzgodniony ekranowany potencjał pochodzący od dwóch ładunków, otrzymano wynik identyczny jak w przypadku „klasycznego” podejścia (zakładającego istnienie ładunku próbnego). W pracy pokazano przebieg upraszczania się poszczególnych wkładów do energii, które w konsekwencji prowadzą do znanych wyników. Dlatego można powiedzieć, że w podręcznikach otrzymuje się prawidłowy wynik, ale otrzymany nieprawidłową metodą.

*T. M. Rusin i W. Zawadzki*

**“Non-locality of Foldy-Wouthuysen and related transformations for the Dirac equation”**

Phys. Rev. A **84**, 062124 (2011).

Udział autora: 75%

W pracy Foldy-Wouthuysena<sup>16</sup> (FW) pokazano, że w równaniu Diraca przy braku zewnętrznych pól można ściśle odseparować stany o dodatnich i ujemnych energiach. W przestrzeni rzeczywistej jądro transformacji FW jest nielokalnym operatorem, a miarą nielokalności jest długość Comptona  $\lambda_c$ . Niniejsza praca została poświęcona dalszej analizie nielokalności transformacji FW oraz podobnej transformacji zaproponowanej przez Mossa i Oknińskiego<sup>17</sup> (MO). Otrzymano następujące wyniki. Przy braku zewnętrznych pól jądro transformacji MO wyraża się przez funkcje delta Diraca oraz funkcję Bessela  $K_1(r)$ . Jądro transformacji FW wyraża się przez funkcję delta Diraca i funkcję zanikającą eksponentalnie z odległością. Obliczono drugie momenty operatorów jąder transformacji FW i MO i pokazano, że dla obu transformacji wariancja jąder jest rzędu  $\lambda_c^2$ . Obliczono numerycznie poszerzenie pakietu gaussowskiego dla transformacji FW i MO. Na koniec obliczono wariancje pakietu gaussowskiego po transformacjach FW i MO. Obie wariancje wyrażają się przez funkcje specjalne. W granicznym przypadku szerokiego pakietu wariancja pakietu po transformacjach

---

<sup>16</sup> L. L. Foldy i S. A. Wouthuysen, Phys. Rev. **78**, 29 (1950).

<sup>17</sup> R. E. Moss i A. Okninski, Phys. Rev. D **14**, 3358 (1976).

nie ulega zmianie (czyli  $V=3/2 d^2$ ), natomiast dla wąskiego pakietu wariancja przetransformowanego pakietu dąży do  $V=7/2 d^2$ .

*T. M. Rusin i W. Zawadzki*

**“Non-locality of energy separating transformations for Dirac electrons in a magnetic field”**

J. Phys. A: Math. Theor. **45** 315301, (2012).

Udział autora: 80%

W pracy analizowano Nielokalność jądra transformacji Mossa and Oknińskiego<sup>17</sup> (MO) dla Hamiltonianu Diraca. Transformacja ta pozwala ściśle odseparować stany o dodatnich i ujemnych energiach także w przypadku niezerowego pola magnetycznego. Otrzymano następujące wyniki. Nielokalność jądra transformacji w kierunku równoległym do pola magnetycznego jest rzędu  $\lambda_c$  i słabo zależy od pola. Poszerzenie jądra transformacji w kierunku prostopadłym do pola magnetycznego silnie zależy od natężenia pola. Dla słabych pól poszerzenie jest rzędu  $\lambda$  i osiąga maksimum dla pola Schwingera  $B=4.4 \times 10^9$  T. Dla jeszcze silniejszych pól poszerzenie jest rzędu długości magnetycznej  $L=(\hbar/eB)^{1/2}$ , czyli maleje z polem. Dla silnych pól magnetycznych obliczono transformację pakietu gaussowskiego i wariancję pakietu po transformacji w zależności od natężenia pola i początkowej szerokości pakietu. Największe względne poszerzenie jądra transformacji otrzymuje się dla wąskiego pakietu i pola magnetycznego rzędu pola Schwingera.

*T. M. Rusin i W. Zawadzki*

**“Green function of electron in monolayer graphene in a magnetic field”**

J. Phys. A: Math. Theor. **44**, 105201 (2011).

Udział autora: 80%

W pracy obliczono ściśle operatory funkcji Greena dla jednoatomowej i dwuatomowej warstwy grafenu w polu magnetycznym w punkcie K strefy Brillouina. W obu przypadkach funkcja Greena jest macierzą  $2 \times 2$ . Dla przykładu, dla pojedynczej warstwy grafenu element (2,2) tej macierzy ma postać (oznaczenia z pracy)

$$\bar{G}_{00}^M(\rho, \rho', E) = \frac{\bar{E} e^{ix}}{2\pi\hbar\omega L^2 |r|} \Gamma(-\bar{E}^2) W_{E^2+0.5,0}(r^2),$$

gdzie:  $\omega$  jest częstością cyklotronową,  $L$  jest długością magnetyczną,  $\rho$  jest dwuwymiarowym wektorem położenia,  $r^2 = (\rho - \rho')^2 / (2L^2)$ ,  $\chi$  jest czynnikiem fazowym zależnym od cechowania,  $\tilde{E} = E/\hbar\omega$  jest bezwymiarową energią,  $\Gamma(z)$  jest funkcją gamma, a  $W_{\mu,\nu}(z)$  jest funkcją Whittakera w standardowych oznaczeniach. W pracy podano przykłady numeryczne dla otrzymanych funkcji Grena oraz przedyskutowano postać funkcji Greena dla punktu K' strefy Brillouina.

**T. M. Rusin i W. Zawadzki**

**Rozdział: „Zitterbewegung (trembling motion) of electrons in graphene”**

w monografii „Graphene Simulation”, pod redakcją Jian Ru Gong, InTech, 2011.

ISBN: 978-953-307-556-3

E-book dostępny na stronie: <http://www.intechopen.com/articles/show/title/zitterbewegung-trembling-motion-of-electrons-in-graphene>

Udział autora: 70%

Praca ta stanowi osobny rozdział książki wydanej elektronicznie i drukiem. Rozdział jest przeglądem prac autorów poświęconych zjawisku ZB w grafenie. Praca zawiera także nowy rezultat: ścisłe i analityczne rozwiązania równania ruchu operatorów  $a(t)$  i  $a^\dagger(t)$  dla elektronu w grafenie w polu magnetycznym. Otrzymane wyniki przewidują istnienie nieskończonej liczby składowych ruchu o częstościach wewnątrz-pasmowych oraz częstościach międzypasmowych odpowiadających ruchowi ZB cząstki. Rozwiązania zostały otrzymane na poziomie operatorowym, bez wprowadzania pakietu falowego, jak miało to miejsce w pracy ”3” obecnego cyklu. Po uśrednieniu równań ruchu przy użyciu pakietu falowego otrzymano identyczne wyniki jak w pracy ”3”.

Warszawa

12/11/2012

T.M. Rusin