Instytut Fizyki Polskiej Akademii Nauk
Oddział Fizyki Promieniowania i Spektroskopii
Zespół Optyki Kwantowej

Procesy nierównowagowe i stany zlokalizowane w kondensatach ekscytonowo-polarytonowych

Michał Kulczykowski

Praca doktorska napisana pod kierunkiem
dr hab. Michała Matuszewskiego, prof. nadzw. IFPAN
Styczeń 2018

Podziękowania

Chciałbym serdecznie podziękować mojemu promotorowi dr hab. Michałowi Matuszewskiemu profesorowi IF PAN za ogrom energii i czasu, który włożył w pomoc i prowadzenie mnie przez zawiłe ścieżki pracy naukowej. Dziękuje też za zaufanie i pomoc w trudnych chwilach.

Life's but a walking shadow, a poor player
That struts and frets his hour upon the stage
And then is heard no more. It is a tale
Told by an idiot, full of sound and fury,
Signifying nothing.

Macbeth

The fool who persists in his folly will become wise

William Blake

Plata o Plomo

Pablo Emilio Escobar Gaviria

And blood-black nothingness began to spin
A system of cells interlinked within
Cells interlinked within cells interlinked
Within one stem. And dreadfully distinct
Against the dark, a tall white fountain played.

Vladimir Nabokov - Pale Fire

- When you're not performing your duties do they keep you in a little box? Cells
- Cells
- Interlinked
- Interlinked
- What's it like to hold the hand of someone you love? Interlinked
- Interlinked
- Did they teach you how to feel finger to finger? Interlinked
- Interlinked
- Do you long for having your heart interlinked? Interlinked
- Interlinked
- Do you dream about being interlinked... ?
- Interlinked
- What's it like to hold your child in your arms? Interlinked
- Interlinked
- Do you feel that there's a part of you that's missing? Interlinked
- Interlinked

Post-traumatic Baseline test - Officer KD6-3.7

Publikacje dotyczące rozprawy

- *Bright sink-type localized states in exciton-polariton condensates* - M. Kulczykowski, N. Bobrovska i Michał Matuszewski - Phys. Rev. B **91** (245310) - 2015
- *Phase ordering kinetics of a nonequilibrium exciton-polariton condensate* - M. Kulczykowski i Michał Matuszewski - Phys. Rev. B **95** (075306) - 2017

Publikacje nie dotyczące rozprawy

- *Angular dependence of giant Zeeman effect for semimagnetic cavity polaritons* - R. Mirek, M. Król, K. Lekenta, J.-G. Rousset, M. Nawrocki, M. Kulczykowski, M. Matuszewski, J. Szczytko, W. Pacuski, B. Piętka - Phys. Rev. B **95** (085429) - 2017
- *Searching for Indirect Excitons in Coupled Double InGaN/GaN Quantum Wells* - T. Suski, G. Staszczak, P. Lefebvre, K. P. Korona, P. Drozdz, G. Muziol, Cz. Skierbiszewski, M. Kulczykowski, M. Matuszewski, E. Grzanka, Sz. Grzanka, J. Smalc-Koziorowska, A. Khachapuridze, P. Perlin - IWN 2016 - 02.10.2016

Spis treści

Spis treści **vi**

1 Wstęp **1**

1.1 Wprowadzenie 1

1.2 Polarytony ekscytonowe 2

1.2.1 Ekscytony 3

1.2.2 Studnia kwantowa 4

1.2.3 Silne sprzężenie światła z materią 6

1.3 Kondensacja Bosego-Einsteina 10

1.3.1 Idealny gas Bosego 11

1.3.2 Słabo oddziałujący gaz Bosego 13

1.4 Kondensacja Polarytonów Ekscytonowych 17

1.4.1 Metody tworzenia kondensatu polarytonowego 17

1.4.2 Otwarto dysypatywne równanie Grossa-Pitajewskiego 18

2 Stany zlokalizowane typu Sink **23**

2.1 Wstęp 23

2.2 Model 25

2.3 Rozwiązania typu Sink 26

2.3.1 Opis rozwiązania typu Sink 26

2.3.2 Sinki w modelu polarytonów ekscytonowych 28

2.4 Domena istnienia i właściwości sinków 31

2.4.1 Metoda znajdowania rozwiązań typu sink 35

2.5 Rozwiązania analityczne 38

2.6 Przypadek dwuwymiarowy 41

2.7 Wnioski 43

3 Kinetyka porządkowania się fazy **44**

3.1 Wstęp 44

3.2 Model 47

3.3 Wyniki 48

3.4 Porządkowanie fazy dla warunków brzegowych Dirichleta 53

3.5 Spadek ilości wirów 54

3.6 Efekt poprawki logarytmicznej 55

4 Przejście typu Berezinskii–Kosterlitz–Thouless **57**

4.1 Wstęp 57

4.2 Opis przejścia BKT w modelu XY 58

4.3 Model 61

4.4 Wyniki 63

5 Podsumowanie **69**

Bibliografia **70**

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Wprowadzenie

Przedmiotem niniejszej rozprawy są teoretyczne rozważania na temat stanów stacjonarnych i procesów występujących w nierównowagowych kondensatach polarytonów ekscytonowych. Polarytony to kwazicząstki powstałe w wyniku silnego sprzężenia modów optycznych ze wzbudzeniami w ciele stałym. Rozważany w tej pracy układ to mikrownęka półprzewodnikowa w której umieszczona jest studnia kwantowa odpowiedzialna za pułapkowanie ekscytonów. Polaryton to cząstka ze spinem całkowitym, która jest w dobrym przybliżeniu bozonem i stąd zbiór takich cząstek może przejść do fazy kondensatu Bosego-Einsteina. W naszych rozważaniach opieramy się głównie na nierezonansowej metodzie generacji kondensatu polarytonowego, która polega na oświetlaniu próbki światłem o energii większej niż energia polarytonu.

W drugim rozdziale analizujemy stacjonarne rozwiązanie, charakterystyczne dla układów nierównowagowych niewystępujące w przypadku równowagi termodynamicznej, nazwane Sinkiem. Wymaga ono do istnienia dwóch, nadbiegających z naprzeciwka fal polarytonów, które spotykają się w punkcie powstania Sinku, który jest jak nazwa wskazuje, miejscem, w którym dochodzi do dysypacji polarytonów. Rozważamy tutaj cechy tego rozwiązania, parametry określające przestrzeń istnienia oraz przybliżone analityczne rozwiązanie.

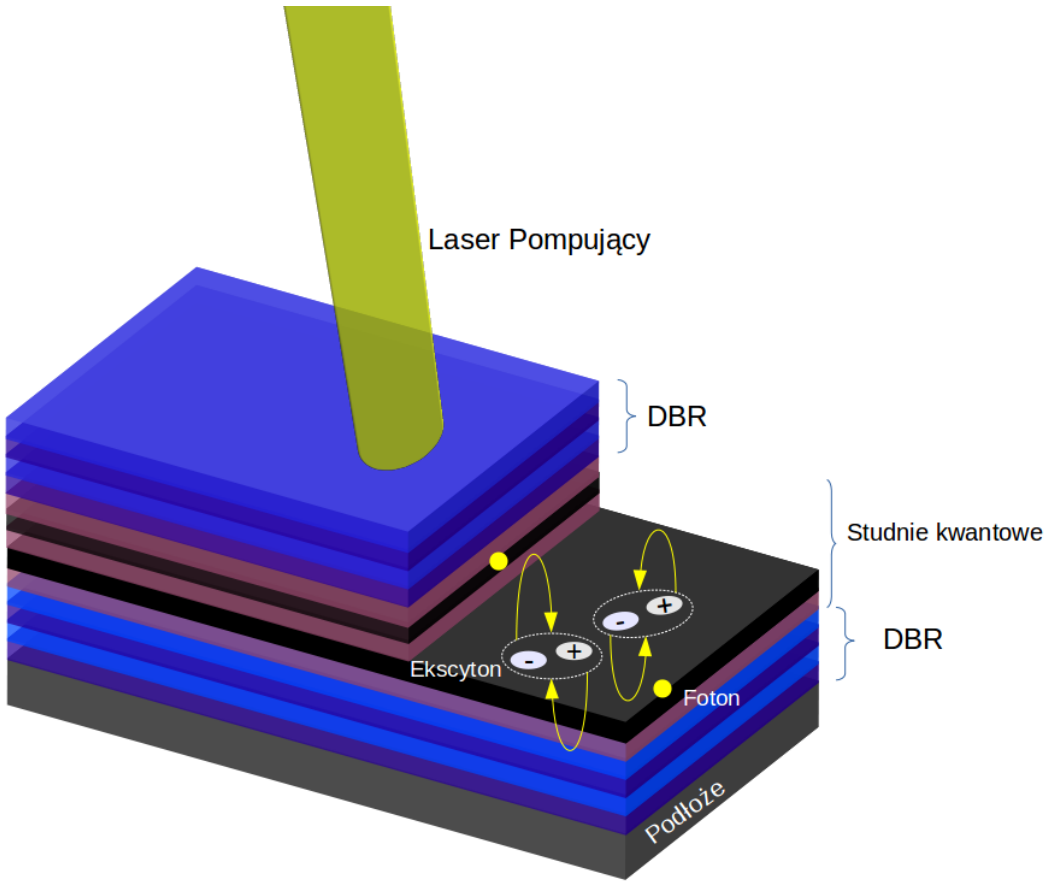
W trzecim rozdziale opisujemy kinetykę porządkowania się fazy, proces w którym możemy zakwalifikować układ do pewnej klasy uniwersalności poprzez badanie zmiany długości korelacji w czasie. W przypadku polarytonów długość korelacji to średnia odległość między wirami,

która rośnie w czasie wraz z anihilacją par wir-antywir. Badamy hipotezę skalowania dla dwóch zestawów parametrów, wykorzystując algebraiczne prawo skalowania z poprawką logarytmiczną.

W ostatnim rozdziale skupiamy się na topologicznym przejściu fazowym, w którym kluczową rolę odgrywają wiry, czyli przejściu Berezinskii–Kosterlitz–Thouless. Omawiane są podstawy teoretyczne na bazie modelu XY oraz wyniki symulacji stochastycznych dla dwóch zestawów parametrów potwierdzające istnienie przejścia BKT dla otwarto dysypatywnego modelu polarytonów.

1.2 Polarytony ekscytonowe

Polarytony ekscytonowe to kwazicząstki, które powstają w wyniku silnego sprzężenia fotonu i ekscytonu. W tej pracy będziemy opierać się o najpopularniejszy schemat otrzymywania silnego sprzeżenia czyli pułapkowanie światła w mikrownęce półprzewodnikowej i ekscytonu w studni kwantowej [1,2]. Na rysunku 1.1 został schematycznie zobrazowany przykład półprzewodnikowej mikrownęki złożonej z luster Braggowskich (oznaczone jak DBR - Distributed Bragg Reflector) oświetlonej z zewnątrz światłem laserowym. Pomimo bardzo dużego współczynnika odbicia, część fotonów wpada do mikrownęki wzbudzając ekscyton, które następnie rekombinując tworzy na nowo foton, który odbijając się od lustra może na nowo wzbudzić ekscyton. Proces ten powtarza się dopóki foton nie opuści wnęki przez lustro, lub wzbudzenie nie zostanie w wyniku innego procesu usunięte z układu. W języku mechaniki kwantowej, proces taki odpowiada silnemu sprzężeniu modów eksytonowych i fotonowych i powstaniu kwaziczątki będącej mieszaniną tych modów. Fakt istnienia zauważalnych strat w układzie, które muszą zostać skompensowane przez ciągłe pompowanie fotonów do układu aby podtrzymać istnienie polarytonów powoduje, że układ ten charakteryzuje się nierównowagową dynamiką, która jest bardzo interesująca i jest także ważnym elementem badań w tej pracy doktorskiej. W związku z tym, że i fotony i ekscytony są bozonami, cząstkami o spinie całkowitym, polarytony posiadają także tą cechę. Powoduje to, że podlegają one statystyce Bosego-Einsteina przez co mogą kondensować [3, 4].



Rysunek 1.1: Schemat mikrownęki półprzewodnikowej. Układ jest pompowany za pomocą zewnętrznej wiązki lasera, co prowadzi do wzbudzenia ekscytonów. Ekscytony te rekombinują generując wtórne fotony. Proces ten w opisie mechaniki kwantowej odpowiada powstaniu polarytonów i trwa on do czasu aż foton nie ucieknie z mikrownęki. W celu podtrzymania populacji polarytonów, układ musi być stale pompowany z zewnątrz.

1.2.1 Ekscytony

Ekscytony to kwazicząstki, które są związaną, poprzez oddziaływanie kulombowskie wewnątrz kryształu, parą elektron-dziura. Elektron wzbudzony do pasma przewodnictwa jest przyciągany przez dodatnio naładowaną dziurę znajdującą się w pasmie walencyjnym. Takie wzbudzenie może istnieć w sieci krystalicznej przez pewien czas aby następnie zrekombinować generując foton. Ekscytony zostały podzielone ze względu na ich rozmiar i energię wiązania. Ekscytony Frenkela mają promień wielkości komórki elementarnej i energię wiązania rzędu $100 - 300meV$, występują najczęściej w związkach organicznych. Ekscytony typowe dla klasycznych półprzewodników to ekscytony Wanniera-Motta, dla których energia przeskoku elektronu

i dziury pomiędzy komórkami w krysztale jest większa niż ich energia wiązania. Rozmiar tego typu ekscytonu jest rzędu dziesiątek wielkości stałej krystalicznej a energia wiązania waha się między kilkoma i kilkunastoma meV. Ekscytony Wanniera-Motta można w uproszczony sposób opisać przy pomocy Hamiltonianu przypominającego Hamiltonian atomu wodoru.

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 f(\mathbf{r}) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} f(\mathbf{r}) = E f(\mathbf{r}) \tag{1.1}$$

gdzie, $\mu = m_e m_h/(m_e + m_h)$ to masa zredukowana, m_e i m_h to odpowiednio masa efektywna elektronu i dziury a $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ to odległość między elektronem a dziurą. Rozwiązania tego hamiltonianu są znane i dla stanu 1s mają postać:

$$f_{1s} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_B^3}} e^{-r/a_B} \tag{1.2}$$

gdzie a_B to promień Bohra ekscytonu postaci:

$$a_B = \frac{\hbar^2 \epsilon\epsilon_0}{4\pi\mu e^2}, \tag{1.3}$$

gdzie ϵ_0 to przenikalność elektryczna próżni a ϵ to przenikalność elektryczna materiału w którym znajduje się ekscyton. Energia wiązania stanu podstawowego to:

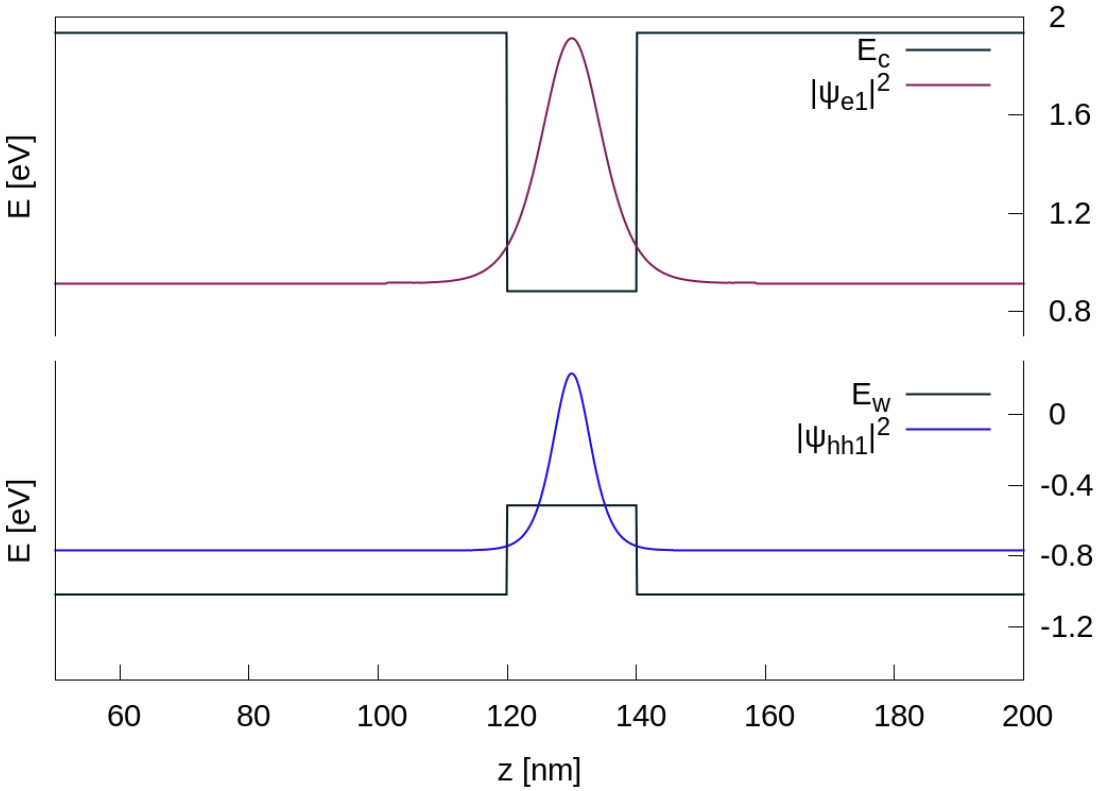
$$E_B = \frac{\hbar^2}{2\mu a_B^2} \tag{1.4}$$

Biorąc pod uwagę zredukowaną masę μ oraz stałą dielektryczną zależną od materiału energia wiązania ekscytonu jest 3 rzędy wielkości mniejsza od energii wiązania atomu wodoru i przykładowo dla $GaAs$ wynosi $4.1meV$.

1.2.2 Studnia kwantowa

Ekscytony Wanniera-Motta z powodu swoich rozmiarów są bardzo czułe na zmiany potencjału na skali nanometrów wynikające z modyfikacji struktury pasmowej półprzewodników. Ekscytony, które są związane w jednym wymiarze, wewnątrz studni kwantowej, wykazują inne spektrum energetyczne niż ekscytony swobodne. Efekty kwantowania w studni są odczuwalne

gdy jej rozmiar jest porównywalny z długością fali de Broglie elektronu i dziury. Powoduje to powstawanie dyskretnych stanów, które mogą zostać obsadzone przez elektron i dziurę. Na wykresie 1.2 widać przykładowy rozkład pasm energetycznych z obsadzonymi stanami podstawowymi studni kwantowej dla elektronu i dziury.



Rysunek 1.2: Poziomy energetyczne elektronu i dziury oraz ich stany własne dla studni kwantowej w której ściany złożone są z $Cd_{0.79}Zn_{0.11}Mg_{0.1}Te$ a sama studnia z $Cd_{0.85}Zn_{0.14}Mn_{0.01}Te$.

Związanie jednego wymiaru przez studnie kwantową prowadzi do zmiany w opisie ekscytonu. Nie można już brać pod uwagę tylko środka masy układu, należy także mieć na uwadze samodzielną dynamikę dziury i elektronu. Do opisu takiego ekscytonu stosuje się poniższy hamiltonian:

$$H_{QW} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{\partial^2}{\partial z_e^2} - \frac{\hbar^2}{2m_h}\frac{\partial^2}{\partial z_h^2} - \frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\right] - \frac{e^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0\sqrt{\rho^2-(z_e^2-z_h^2)^2}} + V(z_e) + V(z_h) \tag{1.5}$$

gdzie ρ to dwuwymiarowy promień ekscytonu a $V(z_e), V(z_h)$ to potencjał studni odpowiednio

dla elektronu i dziury postaci:

$$V(z_\nu) = \begin{cases} V_{QW_{c,w}} & \text{jeżeli } z_\nu < |a| \\ V_{E_{c,w}} & \text{jeżeli } z_\nu > |a| \end{cases} \tag{1.6}$$

$\nu = e, h$ a c, w oznaczają odpowiednio pasmo przewodzenia i walencyjne, a oznacza szerokość studni kwantowej. Przybliżone rozwiązanie dla stanu podstawowego takiego hamiltonianu przybiera postać:

$$f_{1s}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a_B^{2D}} e^{-\rho/a_B^{2D}} \tag{1.7}$$

Promień bohra dla tego przypadku:

$$a_B^{2D} = \frac{a_B}{2} \tag{1.8}$$

i energia wiązania:

$$E_B^{2D} = 4E_B \tag{1.9}$$

Wyraźnie widać, że związanie ekscytonu w studni kwantowej znacznie zwiększa jego energię wiązania co jest bardzo przydatne w inżynierii półprzewodników optycznych.

1.2.3 Silne sprzężenie światła z materią

Polarytony można opisać w uproszczony ale trafny sposób jako stany własne wywodzące się ze sprzężenia dwóch oscylatorów, fotonowego i ekscytonowego. Polaryton ukazany w ten sposób można uważać za proces, w którym ekscyton anihiluje emitując foton o tej samej Energii E i pędzie równoległym do studni $k_\parallel$. Następnie foton jest reabsorbowany przez ośrodek tworząc ekscyton o tym samym (E, k). Proces powtarza się dopóki wzbudzenie nie ucieknie z mikrownęki albo elektron i dziura nie zostaną rozproszone. W poniższych rozważaniach pomijamy spin i wyższe niż $1s$ stany ekscytonu. Moment dipolowy $-e\mathbf{r}$ ekscytonu wiąże się z polem elektrycznym światła $\mathbf{E}$. Prowadzi to do następującego hamiltonianu opisującego polaryton:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \left[E_{pho}(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + E_{ex}(\mathbf{k}) b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\hbar\Omega \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} \right) \right] \tag{1.10}$$

W powyższym hamiltonianie $a_{\mathbf{k}}$ to operator anihilacji fotonu, $b_{\mathbf{k}}$ operator anihilacji ekscytonu. $E_{pho}(\mathbf{k})$ i $E_{ex}(\mathbf{k})$ to energia fotonu w mikrownęce i ekscytonu w studni kwantowej. Ω to częstość Rabiego opisująca spójną zamianę ekscytonu w foton i odwrotnie. Hamiltonian można zdiagonalizować jeśli operator b_k będzie spełniał relacje komutacyjną dla bozonów.

$$\left[b_\nu(\mathbf{k}), b_\mu^\dagger(\mathbf{q})\right] = \delta_{\nu,\mu}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}} \tag{1.11}$$

Bezpośrednie rozwinięcie tego komutatora [5] prowadzi do takiej jego postaci:

$$\left[b_\nu(\mathbf{k}), b_\mu^\dagger(\mathbf{q})\right] = \delta_{\nu,\mu}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}} - \sum_{\mathbf{p}} |\phi_{1s}(\mathbf{p})|^2 \left(c_{\mathbf{k}}^\dagger c_{\mathbf{q}} + h_{-\mathbf{k}}^\dagger h_{-\mathbf{q}}\right) \tag{1.12}$$

gdzie $\phi_{1s}(\mathbf{p})$ to transformacja fouriera stanów własnych równania Wanniera, $c_{\mathbf{k}}$ to operator anihilacji elektronu w paśmie przewodzenia o pędzie $\mathbf{k}$ a $h_{\mathbf{k}}$ to operator anihilacji dziury w paśmie walencyjnym o pędzie $\mathbf{k}$. Komutator ten pokazuje, że diagonalizacja jest słuszna dla niskich gęstości. W szczególności $\left\langle\left[b_0, b_0^\dagger\right]\right\rangle = 1 - O\left(Na_B^2\right)$ gdzie N to gęstość ekscytonów a a_B to promień bohra dla ekscytonu ϕ_{1s}. Można traktować ekscytony jako bozony w dobrym przybliżeniu w granicy $Na_0^2 \ll 1$. Diagonalizacja hamiltonianu rozpoczyna się od dokonania transformacji Hopfielda,

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{k}}^L &\equiv \mathcal{X}_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} - \mathcal{C}_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \\ p_{\mathbf{k}}^U &\equiv \mathcal{C}_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} + \mathcal{X}_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{1.13}$$

gdzie $\mathcal{X}_{\mathbf{k}}$ i $\mathcal{C}_{\mathbf{k}}$ to tak zwane współczynniki Hopfielda, które spełniają zależność $\mathcal{X}_{\mathbf{k}}^2 + \mathcal{C}_{\mathbf{k}}^2 = 1$ przez co transformacja jest kanoniczna i operatory p także spełniają relacje komutacyjną dla bozonów. Hamiltonian (1.10) zostaje przez to zredukowany tylko do członów swobodnej propagacji

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \left(E_U(\mathbf{k}) p_{\mathbf{k}}^{U\dagger} p_{\mathbf{k}}^U + E_U(\mathbf{k}) p_{\mathbf{k}}^{L\dagger} p_{\mathbf{k}}^L\right) \tag{1.14}$$

dla górnej i dolnej gałęzi polarytonu. Relacja dyspersyjna dla tych gałęzi przybiera postać:

$$E_{\substack{U\\L}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\left(E_{ex}(\mathbf{k}) + E_{pho}(\mathbf{k})\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_{\mathbf{k}}^2 + (\hbar\Omega)^2} \tag{1.15}$$

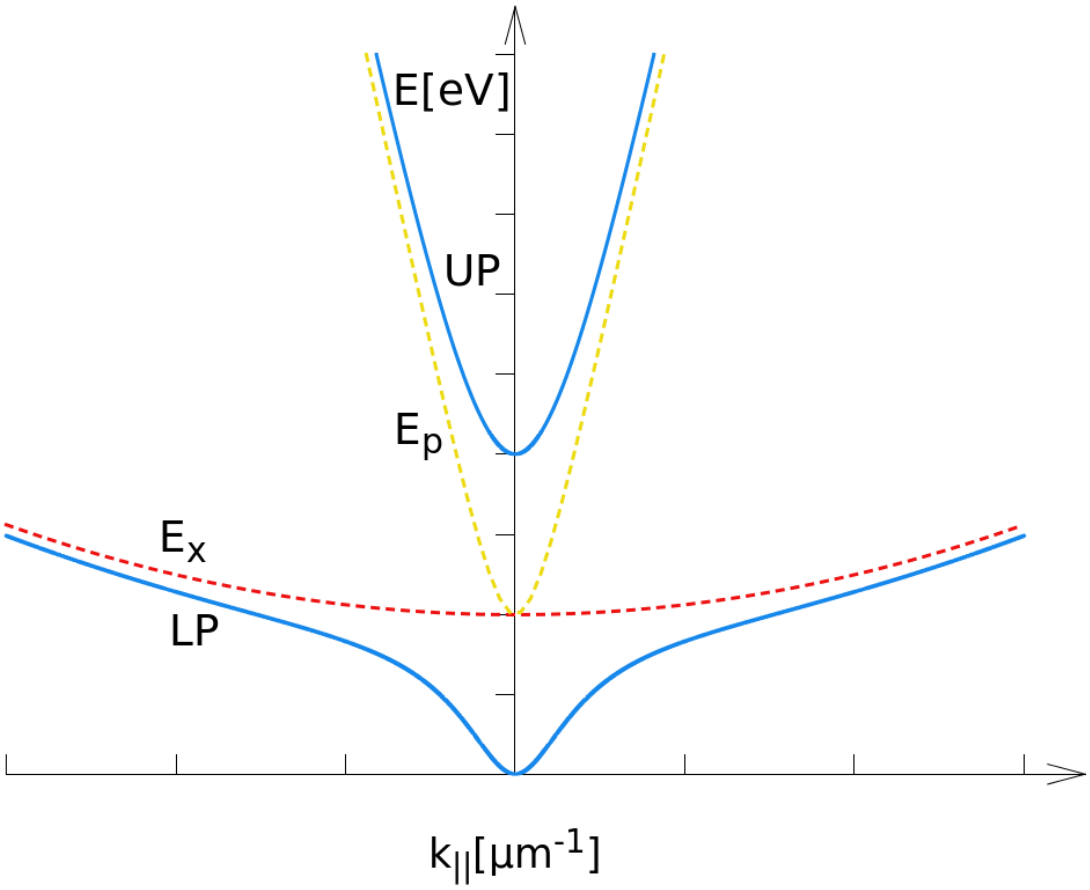
plus odpowiada górnej gałęzi a minus dolnej. $\Delta_{\mathbf{k}}$ to różnica między energiami fotonu i ekscytonu zwana także odstrojeniem

$$\Delta_{\mathbf{k}} = E_{pho}(\mathbf{k}) - E_{ex}(\mathbf{k}) \tag{1.16}$$

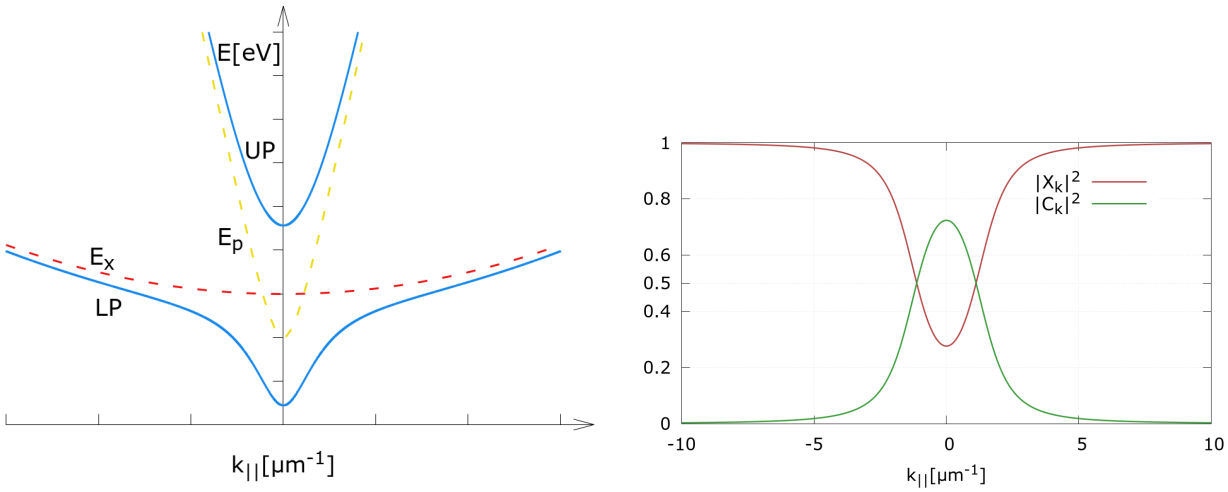
Wykres 1.3 obrazuje dyspersje (1.15) górnej i dolnej gałęzi polarytonu w przypadku gdy odstrojenie $\Delta_{\mathbf{k}} = 0$ dla $\mathbf{k} = 0$, czyli polarytony w obu gałęziach są równą mieszaniną fotonu i ekscytonu. Moduły kwadratu współczynników Hopfielda opisują jak wielki wkład do całego polarytonu ma frakcja fotonowa lub ekscytonowa.

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_{\mathbf{k}}|^2 &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Delta_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\Delta_{\mathbf{k}}^2 + (\hbar\Omega)^2}}\right) \\ |\mathcal{X}_{\mathbf{k}}|^2 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\Delta_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\Delta_{\mathbf{k}}^2 + (\hbar\Omega)^2}}\right) \end{aligned} \tag{1.17}$$

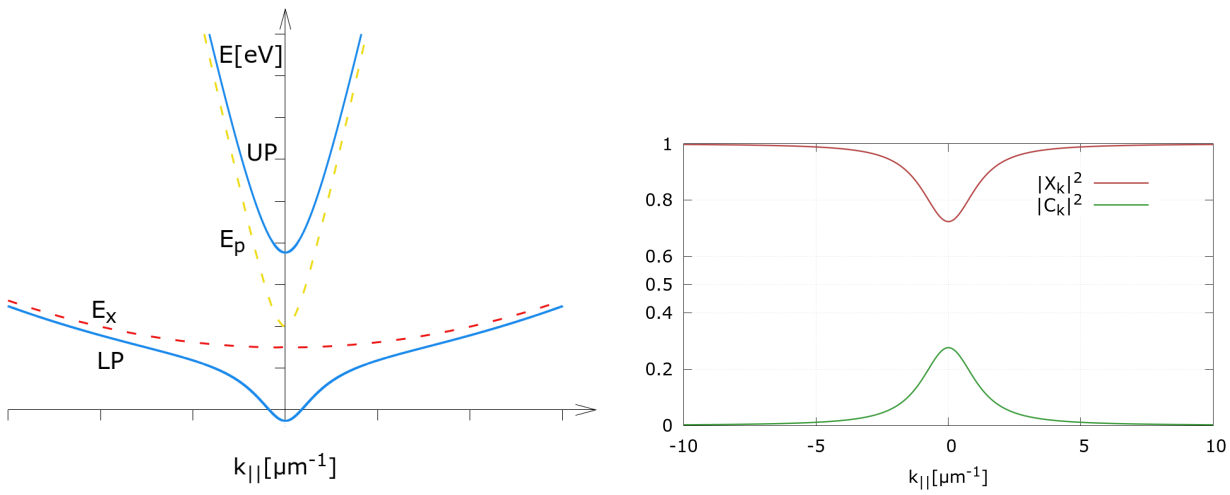
W przypadku gdy odstrojenie $\Delta_{\mathbf{k}} = 0$ współczynniki te mają wartość $|\mathcal{C}_{\mathbf{k}}|^2, |\mathcal{X}_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{2}$ co oznacza, że obie frakcje są w równym stopniu częścią polarytonu co pokazano na wykresie 1.3. W przypadku gdy odstrojenie $\Delta_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{2}\hbar\Omega$ część fotonowa dolnego polarytonu wynosi $|\mathcal{C}_{\mathbf{k}}|^2 \approx 0.72$ co widać na wykresie 1.4. Dla odstrojenia $\Delta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}\hbar\Omega$ część fotonowa polarytonu $|\mathcal{C}_{\mathbf{k}}|^2 \approx 0.28$ co oznacza, że polaryton jest bardziej ekscytonowy, dobrze to widać na wykresie 1.5.



Rysunek 1.3: Wykres dyspersji dla górnej i dolnej gałęzi polarytonu z dodatkowo zaznaczonymi dyspersjami dla fotonu i ekscytonu w przypadku gdy $\Delta_{\mathbf{k}} = 0$ a $\mathbf{k} = 0$.



Rysunek 1.4: Po lewej wykres dyspersji dla górnej i dolnej gałęzi polarytonu z dodatkowo zaznaczonymi dyspersjami dla fotonu i ekscytonu. Po prawej wykres współczynników Hopfielda dla odstrojenia $\Delta_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{2}\hbar\Omega$ przy $\mathbf{k} = 0$. Widać, że dolny polaryton w tym przypadku jest bardziej fotonowy.



Rysunek 1.5: Wykres dyspersji dla górnej i dolnej gałęzi polarytonu z dodatkowo zaznaczonymi dyspersjami dla fotonu i ekscytonu. Po prawej wykres współczynników Hopfielda dla odstrojenia $\Delta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2}\hbar\Omega$ przy $\mathbf{k} = 0$. Dolny polaryton dla tego przypadku jest bardziej ekscytonowy.

1.3 Kondensacja Bosego-Einsteina

Interesująca właściwością bozonów jest ich tendencja do kumulowania się w nieograniczonych ilościach w jednym stanie kwantowym. Przejawem tej własności jest kondensat Bosego-Einsteina, w którym cząstki zachowują się jak makroskopowa fala co pozwala zaobserwować kwantowy efekt w skali makro. U podstaw tego zjawiska leży zasada nierozróżnialności cząstek, która głosi, że cząstki są identycznie i w układzie wielu ciał nie można eksperymentalnie ich odróżnić, i w ten sposób śledzić dynamiki tylko jednej cząstki. Prowadzi to do podziału cząstek ze względu na ich spin na dwa typy: bozony i fermiony. Bozony to cząstki o spinie całkowitym, które nie podlegają zakazowi Pauliego przez co w jednym stanie kwantowym może znajdować się więcej niż jeden bozon. W 1924 roku, Satyendra Nath Bose wysłał swoją pracę do Alberta Einsteina, w której udało mu się wyprowadzić rozkład Plancka nie opierając się o fizykę klasyczną. Einstein bardzo zainteresowany tym wyprowadzeniem przetłumaczył artykuł na niemiecki i w imieniu Bosego opublikował go w *Zeitschrift für Physik*. Rezultatem tej współpracy było wprowadzenie pojęcia gazu Bosego, statystyki Bosego-Einsteina i kondensacji. W 1938 roku Fritz London zaproponował kondensację Bosego-Einsteina jako przyczynę istnienia nadciekłego ^4He. W 1995 Eric Cornell i Carl Wieman uzyskali gazowy kondensat atomów Rubidu schłodzonych do temperatury $170nK$ potwierdzając doświadczalnie istnienie kondensatu. Ta dwójka naukowców wspólnie z Wolfgangiem Ketterle, który niedługo po ich eksperymencie zademonstrował eksperymentalnie

wiele właściwości kondensatu, otrzymała w 2001 roku nagrodę Nobla za swoją pracę.

1.3.1 Idealny gas Bosego

Rozważania zaczniemy od opisu idealnego gazu nie oddziałujących ze sobą bozonów. Wykorzystamy do tego pojęcie wielkiego rozkładu kanonicznego, który znajduje się w równowadze termodynamicznej z rezerwuarem, z którym może wymieniać cząstki. Podstawowym źródłem informacji na temat układu jest wielka suma statystyczna,

$$Z = \sum_{n0} \left(e^{-\beta(E_0-\mu)}\right)^{n_0} \sum_{n1} \left(e^{-\beta(E_1-\mu)}\right)^{n_1} ... \tag{1.18}$$

gdzie $\beta = \frac{1}{k_B T}$, E_i to energia pojedynczej cząstki w danym stanie kwantowy a n_i to ilość cząstek w danym stanie kwantowym . Sumę tę można przekształcić do następującej postaci:

$$Z = \prod_{k=0}^{\infty} \sum_{n_k=0}^{\infty} e^{-\beta(E_k-\mu)n_k} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1-e^{-\beta(E_k-\mu)}} \tag{1.19}$$

Wykorzystując własności sumy szeregu geometrycznego udało się zredukować (1.18) do iloczynu (1.19). Wykorzystując fakt, że mamy do czynienia z bozonami możemy rozszerzyć sumowanie dla każdego k, od 0 do ∞. Potencjał kanoniczny wynosi:

$$\Omega = -k_B T lnZ = k_B T \sum_{k=0}^{\infty} ln\left(1 - e^{-\beta(E_k-\mu)}\right) \tag{1.20}$$

co pozwala nam obliczyć całkowitą ilość cząstek w układzie,

$$N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(E_k-\mu)} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{n}_k \tag{1.21}$$

którą możemy zaprezentować jako sumę średniej ilości obsadzeń stanów.

$$\bar{n}_k = -\frac{\partial}{\partial \beta E_k} lnZ = \frac{1}{e^{\beta(E_k-\mu)} - 1} \tag{1.22}$$

Rozwiązanie to jest słynnym rozkładem Bosego-Einsteina, określającym średnie obsadzenie poziomów energetycznych przez bozony. Równanie to nakłada fizyczne ograniczenie $\mu < E_0$

na potencjał chemiczny idealnego gazu Bosego, gdzie E_0 to stan o najniższej energii. Gdyby potencjał chemiczny był większy od energii stanu podstawowego w powyższym rozkładzie występowałyby ujemne wartości ilości obsadzeń. W przypadku gdy $\mu \to E_0$ ilość cząstek w stanie podstawowym

$$N_0 \equiv \bar{n}_0 = \frac{1}{e^{\beta(E_k-\mu)} - 1} \tag{1.23}$$

staje się coraz większa, co jest podstawą mechanizmu kondensacji Bosego-Einsteina. Można zapisać całkowitą liczbę cząstek w ten sposób:

$$N = N_0 + N_T \tag{1.24}$$

gdzie

$$N_T\left(T, \mu\right) = \sum_{k \neq 0} \bar{n}_k\left(T, \mu\right) \tag{1.25}$$

to ilość cząstek poza kondensatem zwana także chmurą termiczną. Dla ustalonej temperatury T funkcja N_T jest gładka jako funkcja μ i osiąga swoje maksimum N_C dla $\mu = E_0$. Natomiast N_0 jest rzędu jedności oprócz przpadku gdy μ jest bliskie E_0 gdzie jest rozbieżne. Jeżeli wartość $N_C = N_T\left(T, \mu = E_0\right)$ jest większa niż N, to równanie (1.24) jest spełnione dla wartości μ mniejszych niż E_0 i N_0 jest znacznie mniejsze niż N. Skoro funkcja $N_C(T)$ rośnie wraz z temperaturą T ten przypadek odpowiada warunkowi gdy temperatura jest wyższa niż krytyczna temperatura T_C, która opisana jest zależnościa

$$N_T\left(T_C, \mu = E_0\right) = N. \tag{1.26}$$

Jeżeli $N_C(T)$ jest mniejsze niż N albo, co jest równoważne, temperatura $T < T_C$ wtedy aby został spełniony warunek (1.24) należy uwzględnić część N_0 w rozważaniach. Wartość μ będzie się zbliżać do E_0 w limicie termodynamicznym(duże N). Widać stąd, że temperatura T_C definiuje krytyczną temperaturę, poniżej której zachodzi zjawisko kondensacji Bosego-Einsteina czyli makroskopowe obsadzenie pojedynczego stanu kwantowego.

Rozważmy teraz przypadek idealnego gazu Bosego w pudle o periodycznych warunkach brzegowych o objętości V, korzystając z formalizmu wprowadzonego wcześniej. Dla tego przypadku

energia stanu podstawowego $E_0 = 0$, dlatego potencjał chemiczny musi być zawsze mniejszy od zera. Korzystając z zamiany sumowania po stanach $p \neq 0$ na całkowanie $V/(2\pi\hbar)^3 \int dp$ oraz wykorzystując transformację $p^2 = 2mk_BTx$, można zapisać składową termiczną gazu w postaci

$$N_T = \sum_{p\neq 0} \frac{1}{exp\left[\beta(p^2/2m - \mu)\right] - 1} = \frac{V}{\lambda_T^3} g_{3/2}(e^{\beta\mu}) \tag{1.27}$$

gdzie

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_BT}} \tag{1.28}$$

to termiczna długość fali de Broglie'a, a

$$g_{3/2}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx x^{1/2} \frac{1}{z^{-1}e^x - 1} \tag{1.29}$$

to konkretny przypadek bardziej ogólnej klasy funkcji Bosego. Korzystając z kryterium na kondensację Bosego-Einsteina (1.26) uzyskujemy wartość krytycznej temperatury potrzebnej do zaistnienia kondensatu w pudle.

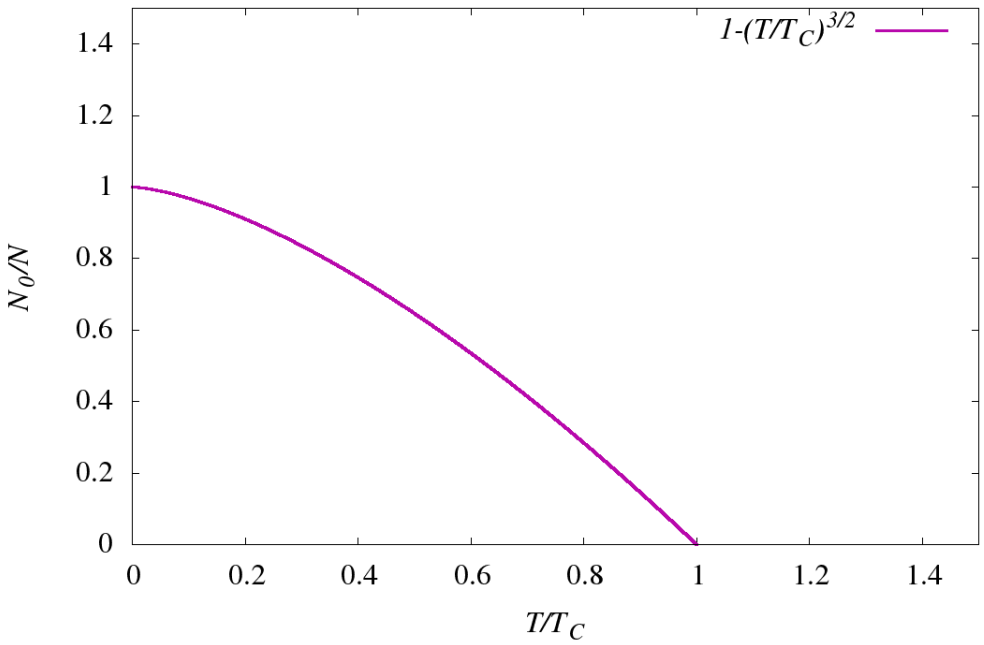
$$T_C = \frac{2\pi\hbar^2}{k_Bm} \left(\frac{n}{g_{3/2}(1)}\right)^{2/3} \tag{1.30}$$

gdzie $g(1) = 2.612$. Równanie (1.30) wyraźnie pokazuje, że temperatura przejścia do kondensatu jest zależna od gęstości $n = N/V$ oraz od masy składników. Korzystając z warunku (1.24) oraz równań (1.27) i (1.30) uzyskujemy wyrażenie na ilość cząsteczek w kondensacie, która staje się wartością makroskopową dla temperatury poniżej temperatury krytycznej (Rys. 1.6) [6].

$$N_0(T) = N\left[1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^{3/2}\right] \tag{1.31}$$

1.3.2 Słabo oddziałujący gaz Bosego

Idealny gaz Bosego omawiany wcześniej jest modelem bardzo uproszczonym, dzięki czemu można przy jego pomocy wyznaczyć takie wartości jak temperatura krytyczna przejścia do



Rysunek 1.6: Frakcja kondensatu $\frac{N_0}{N}$ w zależności od temperatury dla idealnego gazu Bosego.

kondensatu. W rzeczywistości aby gaz mógł stermalizować potrzebne są oddziaływania między cząstkami. W rzeczywistości nawet bardzo rzadka chmura gazu posiada słabe ale istniejące oddziaływania.

Rozważmy cechy rzadkich gazów. W takich gazach zasięg oddziaływań międzyatomowych jest znaczenie mniejszy niż niż średnia odległość między cząstkami. Pozwala to na rozważanie tylko oddziaływań dwucząsteczkowych, konfiguracje z większą ilością cząsteczek można swobodnie pominąć. Odległość miedzy cząsteczkami jest na dyle duża, że do ich opisu można użyć wyłącznie amplitudy rozpraszania. Ponieważ rozważamy gaz w bardzo niskiej temperaturze poniżej temperatury przejścia do kondensatu, amplituda rozpraszania jest niezależna od energii i kąta rozpraszania. W ogólności, pojedynczy parametr, s-falowa długość rozpraszania a opisuje wszystkie efekty oddziaływań i ich wpływ na właściwości fizyczne gazu. Warunek na dostatecznie małą gęstość gazu przyjmuje postać $|a| \ll n^{-1/3}$.

Zapiszmy hamitonian układu w postaci operatorów pola Ψ [6]:

$$\hat{H} = \int \left[\hat{\mathbf{\Psi}}^\dagger(t,\vec{\mathbf{r}}) \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \right) \hat{\mathbf{\Psi}}(t,\vec{\mathbf{r}}) \right] d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int \hat{\mathbf{\Psi}}^\dagger(t,\vec{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{\Psi}}^\dagger(t,\vec{\mathbf{r}'}) V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \hat{\mathbf{\Psi}}(t,\vec{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{\Psi}}(t,\vec{\mathbf{r}'}) d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \tag{1.32}$$

gdzie $V(\mathbf{r})$ to potencjał dwuciałowy. Dla jednorodnego gazu zamkniętego w pudle o objętości

V operator pola można zapisać w postaci:

$$\hat{\mathbf{\Psi}}(t,\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \tag{1.33}$$

gdzie $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ to operator anihilacji stanu pojedynczej cząstki o pędzie $\mathbf{p}$. Wstawiając (1.33) do (1.32) otrzymujemy

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2m} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}',\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{p}'} \hat{a}_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} \tag{1.34}$$

Dzięki temu, że rozważamy rozrzedzony gaz postać potencjału V_q nie musi być znana tak długo jak będzie on odpowiadać poprawnej wartość s-falowej długości rozpraszania. Jako, że rozważamy tylko małe wartości pędu przy tym problemie wielociałowym możemy przepisać hamiltonian (1.34) do następującej postaci:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2m} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2V} V_0 \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}',\mathbf{q}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{p}'} \hat{a}_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} \tag{1.35}$$

Ważną częścią wyprowadzenia jest zastosowanie formalizmu Bogoliubowa [7], czyli zastąpienie operatora $\hat{a}_0$ przez klasyczną liczbę

$$\hat{a}_0 \equiv \sqrt{N_0} \tag{1.36}$$

W rozrzedzonym gazie stany o $\mathbf{p} \neq 0$ istnieją ale ich liczba jest mała, dlatego możemy w pierwszym przybliżeniu pominąć wszystkie wyrażenia zawierające operatory $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ i $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{p}}$ dla których $\mathbf{p} \neq 0$. W tym samym przybliżeniu $N_0 \sim N$ dlatego można zamienić $\hat{a}_0$ na $\sqrt{N_0}$. Korzystając dalej z tego przybliżenia można wyrazić parametr V_0 w zależności od długości rozpraszania a.

$$V_0 = g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \tag{1.37}$$

gdzie g to stała oddziaływań między cząstkami [6]. Funkcja falowa względem makroskopowej wartości N_0 odgrywa ważną rolę w opisie kondensatu. Możemy zapisać operator pola rozdzielając go na część związana z kondensatem i część poza kondensatem

$$\hat{\mathbf{\Psi}}(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r})\hat{a}_0 + \sum_{i\neq 0} \phi_i(\mathbf{r})\hat{a}_i \tag{1.38}$$

Wykorzystując przybliżenie Bogoliubova można potraktować część makroskopową $\phi_0\hat{a}_0$ operatora pola (1.38) jako pole klasyczne co pozwala przepisać równanie (1.38) jako

$$\hat{\mathbf{\Psi}}(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) + \delta\hat{\mathbf{\Psi}}(\mathbf{r}) \tag{1.39}$$

Dla rozrzedzonego gazu Bosego można pominąć część poza kondensatem $\delta\hat{\mathbf{\Psi}}$ co powoduje, że operator pola przybiera postać pola klasycznego ψ i cały układ zachowuje się jak klasyczny obiekt. Funkcja $\psi(\mathbf{r})$ jest funkcja falową kondensatu i odgrywa rolę parametru porządku. Jest to funkcja zespolona opisywana modułem i fazą.

$$\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|e^{i\theta(\mathbf{r})} \tag{1.40}$$

Moduł określa wkład kondensatu do gęstości, natomiast faza odgrywa ważną rolę w opisie koherencji i nadciekłości kondensatu. Parametr porządku opisuje tylko kondensat i znika powyżej temperatury krytycznej.

W celu wyprowadzenia równania opisującego dynamikę operatora pola $\hat{\mathbf{\Psi}}(\mathbf{r},t)$ odniesiemy się do reprezentacji Heisenberga tego operatora.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{\Psi}}(\mathbf{r},t) = \left[\hat{\mathbf{\Psi}}(\mathbf{r},t), \hat{H}\right] = \left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r},t) + \int \hat{\mathbf{\Psi}}^\dagger(\mathbf{r}',t)V(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\hat{\mathbf{\Psi}}(\mathbf{r}',t)d\mathbf{r}'\right]\hat{\mathbf{\Psi}}(\mathbf{r},t) \tag{1.41}$$

Równanie to można uzyskać z wyrażenia na Hamiltonian $\hat{H}$ (1.32) oraz z relacji komutacyjnych

$$\begin{aligned}[\hat{\mathbf{\Psi}}(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{\Psi}}^\dagger(\mathbf{r})] &= \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\ [\hat{\mathbf{\Psi}}(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{\Psi}}(\mathbf{r})] &= 0\end{aligned} \tag{1.42}$$

Wykorzystując teraz przybliżenie Bogoliubova opisane wcześniej możemy zastąpić operator pola $\hat{\mathbf{\Psi}}(\mathbf{r})$ polem klasycznym $\psi(\mathbf{r})$ i potencjał oddziaływań dwucząsteczkowych $V(\mathbf{r}'-\mathbf{r})$ stałą oddziaływań g co daje nam ostatecznie

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t) = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r},t) + g\left|\psi(\mathbf{r},t)\right|^2\right)\psi(\mathbf{r},t) \tag{1.43}$$

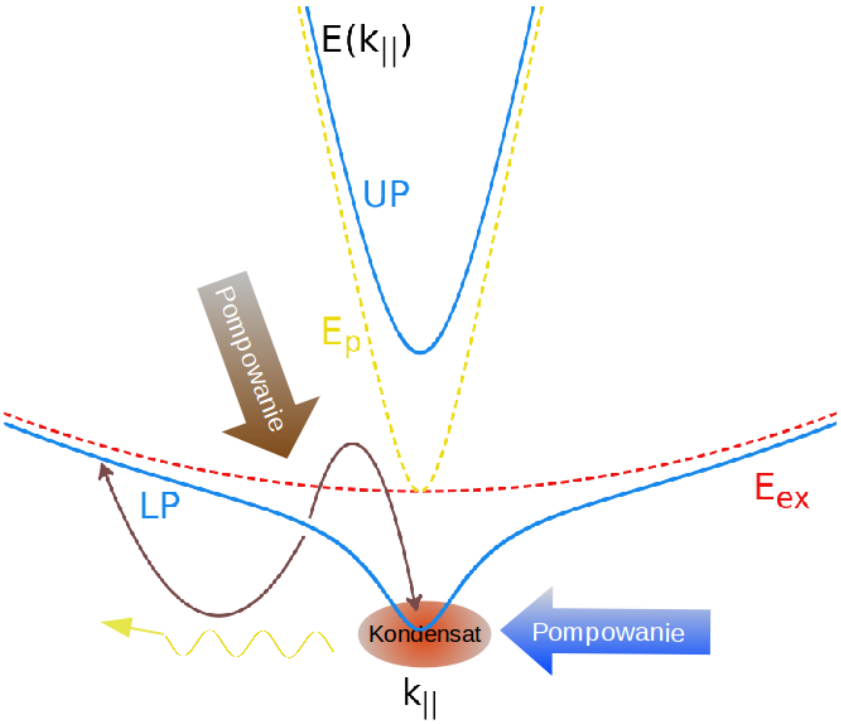
zwane równaniem Grossa-Pitaevskiego, które jest podstawowym narzędziem do badania niejednorodnego rozrzedzonego gazu Bosego w niskiej temperaturze.

1.4 Kondensacja Polarytonów Ekscytonowych

1.4.1 Metody tworzenia kondensatu polarytonowego

Istnieje kilka metod generowania polarytonów w układzie mikrownęki ze studnią kwantową. Najprostszą metodą jest pompowanie układu światłem laserowym o energii równej minimum dolnego polarytonu. Koherencja polarytonów w tym typie pompowania jest „dziedziczona" z lasera pompującego. Schematycznie mechanizm ten zobrazowano na rysunku 1.7 przy pomocy niebieskiej strzałki. Drugim bardziej skomplikowanym typem generacji polarytonów jest tzw mechanizm OPO(optical parametric oscillator) w którym to oświetla się próbkę laserem, który generuje polarytony, które rozpraszają się do stanu u niższym pędzie i energii oznaczanym jako sygnał i o wyższej energii i pędzie oznaczanym jako idler. Proces ten musi zachowywać energię i pęd dlatego warunkiem koniecznym jest aby $2k_p = k_s + k_i$ oraz $2\omega_p = \omega_s + \omega_i$. Nie każda dyspersja spełnia te warunki jednak dla krzywej dolnego polarytonu są one spełnione. Ustalając $k_s = 0$ czyli w minimum energii dolnego polarytonu można ustalić konkretną wartość k_p tak aby dobrać odpowiednio kąt pod którym będzie padać światło lasera na próbkę [8]. Schematycznie ten typ pompowania przedstawiono na rysunku 1.7 dużą brązowo strzałką. Dwie mniejsze brązowe strzałki reprezentują rozpraszanie polarytonów do stanu signal, w minimum energii krzywej dolnego polarytonu, i do stanu idler powyżej punktu pompowania.

Najważniejszym z naszego punktu widzenia mechanizmem tworzenia polarytonów jest pompowanie nierezonansowe, w którym to oświetla się próbkę laserem o energii wyższej niż energia polarytonu. Mechanizm ten jest zobrazowany na rysunku 1.8. Pompa laserowa tworzy wolne nośniki(oznaczone czerwonym obszarem na rysunku), które relaksują poprzez oddziaływania z fononami do stanu ekscytonowego(oznaczone czerwoną strzałką). Ekscytony te dalej relaksują aż do obszaru wąskiego gardła(zaznaczony na czarno na rysunku) gdzie rozpraszanie wspomagane fononami jest bardzo słabe. Dalej dochodzi do relaksacji przy pomocy oddziaływań pomiędzy polarytonami, która powoduje, że część z tych polarytonów relaksuje na samo dno



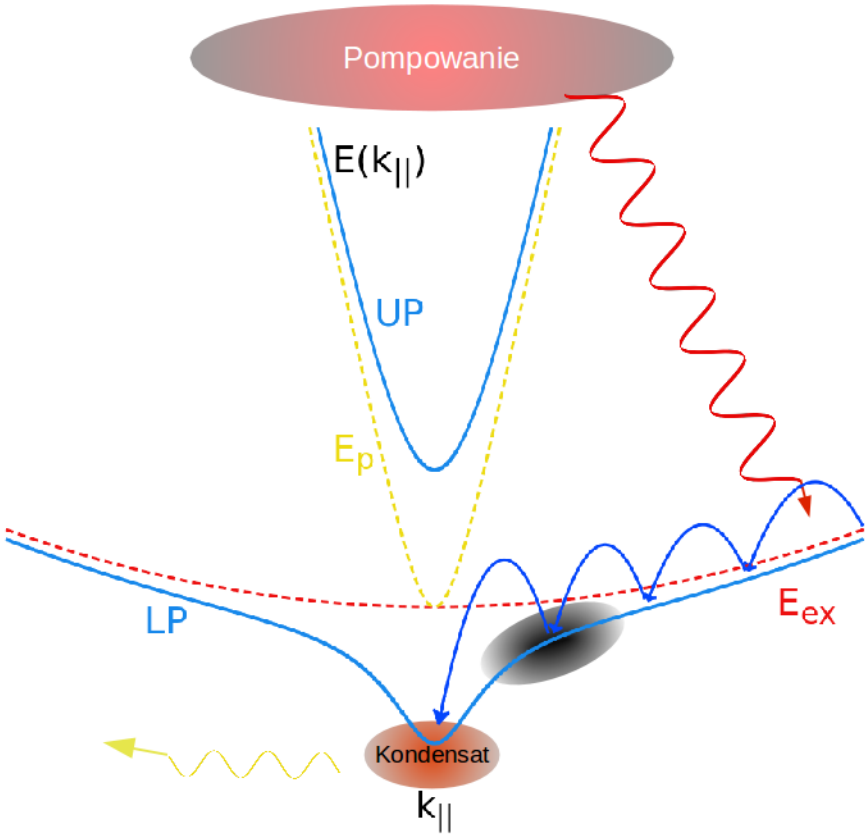
Rysunek 1.7: Schemat tworzenia kondensatu polarytonowego metodą rezonansową(niebieska strzałka) i OPO(brązowa strzałka).

dolnego polarytonu. Gdy moc pompowania jest na tyle duża, że przezwycięża straty w układzie na dnie powstaje makroskopowa liczba polarytonów. Polarytony te, posiadają długozasięgową koherencję oraz makroskopowe obsadzenie stanu podstawowego więc zachowują się jak kondensat Bosego-Einsteina. Możemy dzięki temu użyć przybliżenia pola średniego zastosowanego w równaniu (1.43).

1.4.2 Otwarto dysypatywne równanie Grossa-Pitajewskiego

Równanie (1.43) nie uwzględnia pompownia i strat co jest kluczowe dla opisu kondensatu polarytonowego. Rozważając straty i pompowanie w układzie warto zacząć od wyprowadzenia równania ciągłości dla równania (1.43). Oznaczamy gęstość prawdopodobieństwa $\rho(\mathbf{r},t) = \psi^*(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t)$ i wyznaczamy jej pochodną po czasie.

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t) = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi(\mathbf{r},t)\nabla^2\psi^*(\mathbf{r},t) - \psi^*(\mathbf{r},t)\nabla^2\psi(\mathbf{r},t)\right) - \frac{i}{\hbar}\left(V_{ext} - V_{ext}^*\right)\rho(\mathbf{r},t) \tag{1.44}$$



Rysunek 1.8: Schemat tworzenia kondensatu metodą nierezonansową.

Jeżeli potencjał V_{ext} jest rzeczywisty wtedy $V_{ext}^* = V_{ext}$ i ostatni człon (1.44) znika. W przypadku gdy potencjał jest zespolony i ma postać $V_{ext} = V_{Re} + iV_{Im}$ równanie (1.44) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r},t) + j(\mathbf{r},t) = \frac{2}{\hbar}V_{Im}\rho(\mathbf{r},t) \tag{1.45}$$

Człon po prawej stronie równania (1.45) powoduje, że gęstość prawdopodobieństwa ρ nie zostaje zachowana i wzrasta z czasem. Gdyby potencjał był ujemny mówilibyśmy o stratach. Możemy wykorzystać powyższe rozważania do rozszerzenia równania (1.43) o straty γ i pompowanie P tak aby nasze równanie było bardziej realistyczne.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t) = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + g\left|\psi(\mathbf{r},t)\right|^2 + \frac{i\hbar}{2}(P-\gamma)\right)\psi(\mathbf{r},t) \tag{1.46}$$

Bardziej realistyczne równanie GPE opisujące nierezonansowo pompowany kondensat polarytonów ekscytonowych przybiera nastepującą postać:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + g_{\mathrm{C}}|\psi(\mathbf{r},t)|^2 + g_{\mathrm{R}}n_{\mathrm{R}}(\mathbf{r},t) + \frac{i\hbar}{2}\left(Rn_{\mathrm{R}}(\mathbf{r},t) - \gamma_{\mathrm{C}}\right)\right)\psi(\mathbf{r},t) \tag{1.47}$$

gdzie g_C to stała oddziaływań pomiędzy polarytonami, g_R to stała oddziaływania pomiędzy polarytonami w kondensacie a rezerwuarem, R to stała rozpraszania cząstek do kondensatu, γ_C to czas życia polarytonu, który jest rzędu ps. Ważnym aspektem równania (1.47) jest parametr $n_{\mathrm{R}}(\mathbf{r},t)$, który odpowiada za gęstość rezerwuaru i sam opisany jest równaniem:

$$\frac{\partial n_{\mathrm{R}}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = P - (\gamma_{\mathrm{R}} + R|\psi(\mathbf{r},t)|^2)n_{\mathrm{R}}(\mathbf{r},t) \tag{1.48}$$

gdzie P to moc pompowania a γ_R to czas życia cząstek w rezerwuarze.

Teraz przejdziemy do omawiania zagadnienia wzbudzeń w kondensacie polarytonowym wykorzystując formalizm perturbacyjny Bogoliubova-de Gennesa. Podstawowym założeniem jest stan stacjonarny z jednorodną gęstością, co oznacza, że pompowanie i straty się równoważą dając warunek na stacjonarną gęstość rezerwuaru $n_R^0 = \gamma_C/R$. Wstawiając ten warunek do równania (1.48) otrzymujemy wyrażenie na gęstość polarytów $|\psi_0|^2 = (1 - \frac{RP}{\gamma_C\gamma_R})\frac{\gamma_R}{R}$. Zakładając, że $|\psi_0|^2 = 0$ gdy jesteśmy na progu kondensacji, wyznaczamy wartość graniczną pompowania układu

$$P_{th} = \frac{\gamma_C\gamma_R}{R} \tag{1.49}$$

Aby można było spełnić równianie ewolucji (1.47), zakładamy, że $\psi(\mathbf{r},t) = \psi_0 e^{-i\mu_0 t}$ gdzie $\mu = g_c|\psi_0|^2 + g_R n_R^0$ to potencjał chemiczny jednorodnego kondensatu, który służy jako sztuczny ale przydatny analog potencjału chemicznego występującego w kondensatach atomowych. Jego sztuczność bierze się z faktu, że w układach nierównowagowych potencjał chemiczny nie istnieje. Wprowadzono go dlatego, że istnieje wiele podobieństw w opisie kondensatów atomowych i polarytonowych.

Chcemy teraz sprawdzić, czy kondensat jest stabilny pod wpływem małych fluktuacji, dlatego wprowadzamy małe zaburzenie zgodnie z koncepcją Bogoliubova-de Gennesa. Zaburzenia

kondensatu (1.47) i rezerwuaru (1.48) można przedstawić w postaci furierowskiej

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r},t) &= \psi_0 e^{-i\mu_0 t}\left[1+\sum_{\mathbf{k}}\left(u_{\mathbf{k}}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}+\nu^*_{\mathbf{k}}e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right)\right] \\ n_R(\mathbf{r},t) &= n_R^0\left[1+\sum_{\mathbf{k}}\left(w_{\mathbf{k}}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}+w^*_{\mathbf{k}}e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right)\right] \end{aligned} \tag{1.50}$$

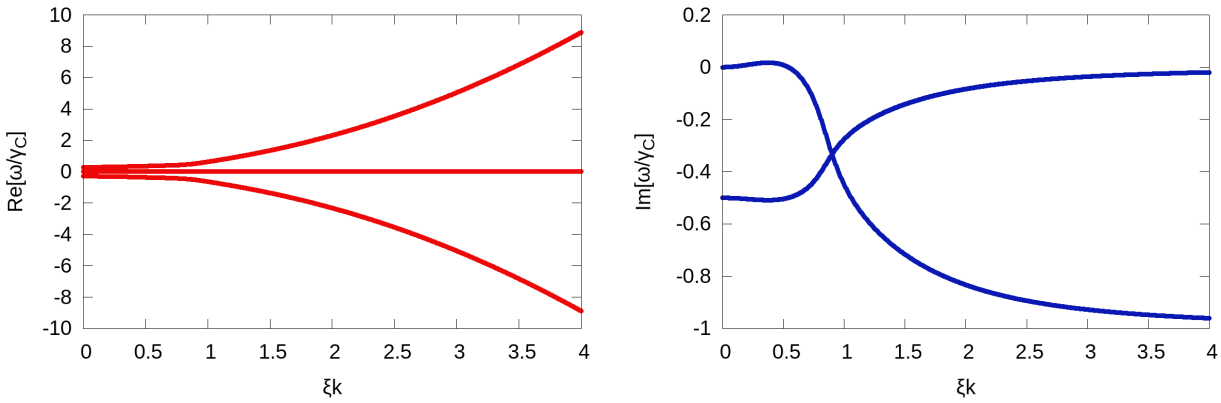
gdzie $u_{\mathbf{k}}$, $\nu_{\mathbf{k}}$ oraz $w_{\mathbf{k}}$ to małe amplitudy wzbudzeń o danej wartości $\mathbf{k}$. Jako, że rozpatrujemy tylko małe zaburzenia interesują nas tylko liniowe człony przy amplitudach wzbudzeń, wyższe rzędy są pomijane. Po uporządkowaniu członów uzyskujemy zagadnienie własne

$$\mathcal{L}_{\mathbf{k}}\mathcal{U}_{\mathbf{k}} = \hbar\omega_{\mathbf{k}}\mathcal{U}_{\mathbf{k}} \tag{1.51}$$

w którym $\mathcal{U}_{\mathbf{k}}$ to wektor amplitud fluktuacji postaci $\mathcal{U}_{\mathbf{k}} = (u_{\mathbf{k}}, \nu_{\mathbf{k}}, w_{\mathbf{k}})^T$ a $\mathcal{L}_{\mathbf{k}}$ przybiera jawną postać

$$\mathcal{L}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar k^2}{2m}+g|\psi_0|^2 & g|\psi_0|^2 & \left(\frac{i\hbar}{2}R+g_R\right)n_R^0 \\ -g|\psi_0|^2 & -\frac{\hbar k^2}{2m}-g|\psi_0|^2 & \left(\frac{i\hbar}{2}R-g_R\right)n_R^0 \\ -i\hbar R|\psi_0|^2 & -i\hbar R|\psi_0|^2 & -i\hbar(\gamma_R+R|\psi_0|^2) \end{pmatrix}. \tag{1.52}$$

Widmo wzbudzeń elementarnych można wyznaczyć obliczając wartości własne macierzy $\mathcal{L}_{\mathbf{k}}$. Wyznaczone gałęzie wzbudzeń dla parametrów postaci $g_C = 0.06\mu eV\mu m^2, g_R = 0.12\mu eV\mu m^2, \gamma_C = 4.56ps^{-1}, \gamma_R = 3ps^{-1}, R = 0.25\mu m^2, P_{th} = 55.97\mu m^{-2}ps^{-1}, \xi = 0.49\mu m$, pokazano na wykresach 1.9. Urojona część $Im[\omega/\gamma_C]$ wartości własnych macierzy $\mathcal{L}_{\mathbf{k}}$ zawiera w sobie informacje na



Rysunek 1.9: Część rzeczywista i urojona spektrum wzbudzeń Bogoliubova.

temat stabilności kondensatu. Jeżeli część urojona jest ujemna $Im[\omega/\gamma_C] < 0$ dla każdego $\mathbf{k}$ to

stan jednorodny jest stabilny. W przeciwnym wypadku gdy dla niektórych $\mathbf{k}$, $Im[\omega/\gamma_C] > 0$ to rozwiązanie jednorodne jest niestabilne i każde małe zaburzenie przenosi układ do innego stanu. Zazwyczaj w pierwszej fazie jest to związane z wykładniczym wzrostem modulacji gęstości i spontanicznym tworzeniem się zlokalizowanych defektów, takich jak jasne i ciemne solitony. Po tej przejściowej fazie system może albo zbliżyć się do innego stałego stanu, albo wejść w stan burzliwy z pewnym stopniem chaosu.

W przypadku zaprezentowanym na wykresach 1.9 system jest niestabilny ze względu na postać urojonej części spektrum. Niestabilność wynika z gałęzi wzbudzeń gęstości rezerwuaru, której część urojona staje się dodatnia dla małych $\mathbf{k}$. Mamy sytuację w której układ jest w stanie nieadiabatycznym, gdzie rezerwuar relaksuje znaczniej wolniej niż kondensat polarytonowy. Część rzeczywista dyspersji wzbudzeń Bogoliubova zawiera trzy gałęzie, dwie które są symetryczne względem zera i reprezentują dwa stopnie swobody zespolonej funkcji falowej kondensatu. Trzecia gałąź, o zerowej wartości opisuje dyfuzyjny charakter rezerwuaru.

Rozdział 2

Stany zlokalizowane typu Sink

2.1 Wstęp

Silne sprzężenie ekscytonów półprzewodnikowych z fotonami znajdującymi się w mikrownęce prowadzi do pojawienia się rezonansu świadczącego o występowaniu kwazicząstek zwanymi polarytonami ekscytonowymi. [5, 9, 10]. Cząstki te posiadają bardzo małą masę efektywną, kilka rzędów mniejszą od masy elektronu, co pozwala na obserwację kondensacji Bosego-Einsteina już w temperaturze pokojowej [4, 11–18]. Jednocześnie polarytony wykazują silne oddziaływania międzycząsteczkowe wynikające ze składowej ekscytonowej i pikosekudnowe czasy życia wynikające ze składowej fotonowej. Są one aktywnie badane z punktu widzenia badań fundamentalnych [14–18] jak i potencjalnych zastosowań [19–24].

W ostatnich latach poświęcono wiele uwagi nieliniowym samozlokalizowanym stanom nadciekłego płynu polarytonowego takim jak jasne i ciemne solitony [25–35]. Solitony to nieliniowe paczki falowe, które zachowują swój kształt dzięki równowadze między dyspersją a nieliniowością [36]. Znalazły one zastosowanie w telekomunikacji światłowodowej na dużych odległościach [37] oraz jako metoda opisu wielu układów fizycznych. Istnienie solitonów polarytonowych zademonstrowano zarówno w przypadku pompowania rezonansowego [25–32] jak i nierezonansowego [33–35, 38–40] . Do tej pory nie udało się jednak znaleźć rozwiązań w postaci jasnych stanów w przypadku nierównowagowym z jednorodnym pompowaniem.

Nadpłyny polarytonowe z natury są układami nierównowagowymi w których dużą rolę odgrywa równowaga pomiędzy pompowaniem i stratami [4, 18, 41]. W wielu poprzednich pracach

czynnik ten był traktowany jako niepożądana komplikacja teorii. Standardowe modele, takie jak zachowawcze równanie Grossa-Pitajewskiego, były często wykorzystywane do opisu solitonów. Jednakże, jak dobrze wiadomo, samozlokalizowane rozwiązania w układach ze stratami posiadają jakościowo inne cechy niż te w układach zachowawczych. W przypadku oddziaływań odpychających istnieje tylko jeden typ rozwiązań dla jednowymiarowych układów zachowawczych - jasny lub ciemny soliton, w zależności od znaku masy efektywnej. W przypadku układu ze stratami istnieje rodzina jakościowo innych stanów zlokalizowanych takich jak źródła, sinki, fale uderzeniowe i impulsy [42–48]. W ogólności mogą one wykazywać nietrywialne prądy wewnętrzne oraz mogą podlegać skomplikowanej, czasem nawet chaotycznej dynamice [35, 49, 50].

W tym rozdziale chciałbym zademonstrować istnienie i stabilność jasnych samozlokalizowanych rozwiązań otwarto-dysypatywnego modelu polarytonowego. Rozwiązania te zostały zaklasyfikowane jako sinki(anty-ciemne solitony) [43, 47, 48]. Nazwa ta oddaje ich strukturę, a dokładnie sugeruje istnienie punktu w którym dochodzi do zakończenia linii przeciwległych prądów, oraz lokalne zwiększenie strat. Rozwiązania typu sink posiadają profil podobny do jasnych solitonów, jednakże są jakościowo inne. W odróżnieniu od jasnych solitonów istnieją one dla oddziaływań odpychających i reprezentują heterokliniczne rozwiązanie łączące dwie przeciwnie biegnące fale płaskie, widać to na rysunku 2.1. Zademonstruję dynamikę formowania się i stabilność rozwiązania typu sink w realistycznym modelu z odpowiednio dobranym profilem pompowania. Systematycznie zbadam właściwości sinków i podam przybliżoną analityczną formułę określająca ich kształt. W przypadku dwuwymiarowym pokażę, że obecność spontanicznie pojawiających się wirów uniemożliwia tworzenie się superprądów niezbędnych do istnienia sinków.

2.2 Model

Rozważamy jednowymiarowy(1D) kondensat polarytonowy np spułapkowany w mikrodrucie [51]. Modelujemy nasz układ wykorzystując otwarto-dysypatywne rówanie Grossa-Pitajewskiego na funkcję falową kondensatu $\psi(x,t)$ powiązane z równaniem na ewolucję gęstości polarytonowego rezerwuaru $n_R(x,t)$ [35, 41, 52],

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2 D}{2m^*}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + g_{\mathrm{C}}^{\mathrm{1D}}|\psi|^2\psi + g_{\mathrm{R}}^{\mathrm{1D}} n_{\mathrm{R}}\psi + i\frac{\hbar}{2}\left(R^{\mathrm{1D}} n_{\mathrm{R}} - \gamma_{\mathrm{C}}\right)\psi \\ \frac{\partial n_{\mathrm{R}}}{\partial t} &= P(x) - (\gamma_{\mathrm{R}} + R^{\mathrm{1D}}|\psi|^2) n_{\mathrm{R}} \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdzie $P(x)$ to tempo kreacji ekscytonów zdeterminowane przez profil pompowania, m^* to masa efektywna dolnego polarytonu, a γ_C i γ_R to współczynniki strat kondensatu i rezerwuaru. $\left(R^{1D}, g_i^{1D}\right) = \left(R^{1D}, g_i^{1D}\right)/\sqrt{2\pi d^2}$. Parametr R określa szybkość stymulowanego rozpraszania, a g_C, g_R to współczynniki oddziaływań polaryton-polaryton i polaryton-ekscyton, które zostały przeskalowane. Zakładamy poprzeczny gaussowski profil funkcji $|\psi|^2$ i n_R o szerokości d. W przypadku jednowymiarowego mikrodrutu [51], szerokość profilu d jest rzędu szerokości mikrodrutu. Wprowadziliśmy oznaczenie $D = 1 - iA$, gdzie A jest niewielką stałą odpowiadająca za rozpraszanie energii w kondesacie [51–54]. Aby uzyskać układ równań w jednostkach bezwymiarowych należy przeskalować czas, przestrzeń, amplitudę funkcji falowej i współczynniki materiałowe zgodnie z $t = \tau\widetilde{t}$, $x = \xi\widetilde{x}$, $\psi = (\xi\beta)^{-1/2}\widetilde{\psi}$, $n_R = (\xi\beta)^{-1}\widetilde{n}_R$ $R^{\mathrm{1D}} = (\xi\beta/\tau)\widetilde{R}$, $(g_C^{\mathrm{1D}}, g_R^{\mathrm{1D}}) = (\hbar\xi\beta/\tau)(\widetilde{g}_C, \widetilde{g}_R)$, $(\gamma_C, \gamma_R) = \tau^{-1}(\widetilde{\gamma}_C, \widetilde{\gamma}_R)$, $P(x) = (1/\xi\beta\tau)\widetilde{P}(x)$, gdzie $\xi = \sqrt{\hbar\tau/2m^*}$, podczas gdy τ and β są arbitralnymi parametrami skalowania. Równanie (2.1) zostało przepisane w formie bezwymiarowej (tyldy nad symbolami zostały pominięte).

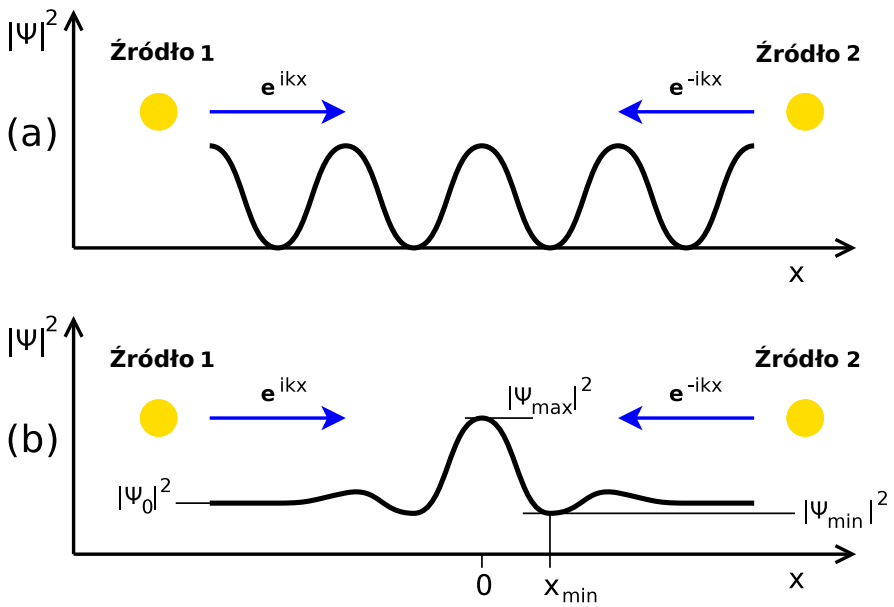
$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \left[-D\frac{\partial^2}{\partial x^2} + g_C|\psi|^2 + g_R n_R + \frac{i}{2}\left(R n_R - \gamma_C\right)\right]\psi, \\ \frac{\partial n_R}{\partial t} &= P(x) - \left(\gamma_R + R|\psi|^2\right) n_R. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Po powyższych transformacjach normy obu pól $N_\psi = \int |\psi|^2 dx$ i $N_R = \int n_R dx$ są przemnożone przez współczynnik β.

2.3 Rozwiązania typu Sink

2.3.1 Opis rozwiązania typu Sink

Struktura rozwiązania typu sink może być zrozumiana w najprostszy sposób jako rezultat interakcji dwóch biegnących z naprzeciwka fal. W przypadku liniowym, dwie fale wyemitowane z odległych źródeł generują standardowy wzór interferencyjny tak jak widać na rys.2.1a. W przypadku dysypatywnego modelu z nieliniowymi współczynnikami strat i pompowania, wzór interferencyjny może przejść w zlokalizowany pik gęstości, czasami wykazujący cechy oscylacyjne tak jak widać na rysunku 2.1b. Sink to heterokliniczne rozwiązanie łączące dwie płaskie fale wyemitowane przez źródła po przeciwnych stronach. Dwie fale zderzają się w miejscu pojawienia się sinku, gdzie nadbiegające prądy gęstości ulegają rozproszeniu [43].



Rysunek 2.1: Amplituda funkcji falowej stworzonej przez dwie nadbiegające z naprzeciwka fale. (a) Schemat interferencji w reżimie liniowym (b) Stacjonarny, zlokalizowany stan typu sink w modelu z nieliniowym rozpraszaniem

Kształt sinku jest wynikiem zdolności dysypatywnego ośrodka do wygładzania maksimów i minimów standardowego wzoru interferencyjnego. Kiedy jedna z fal osiągnie obszar, który zajmuje druga, wynikająca stąd interferencja prowadzi do zaniku fal. Rozważmy jedno z najprostszych dysypatywnych, nieliniowych równań, tzw. zespolone równanie Ginzburga-Landaua [43,44] (CGLE),

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[iD\frac{\partial^2}{\partial x^2} + iC|\psi|^2 - iB \right] \psi. \tag{2.3}$$

Równanie to można uzyskać z zestawu równań (2.2) w limicie szybkiego czasu relaksacji rezerwuaru, który jest „zniewolony” (slaved) przez wolniejszą dynamikę ψ w liniowym przybliżeniu $|\psi|^2 \approx n_0 \equiv ImB/ImC = (P - Pth)\,\gamma_C$ (n_0 jest dynamiczną, równowagową gęstością która występuje gdy straty i pompowanie się równoważą). Zakładamy tutaj jednorodny profil pompowania $P(x) = const > P_{th}$ i wprowadzamy progową moc pompowania $P_{th} = \gamma_R\gamma_C/R$. Parametry CGLE to $B = i\gamma_C/2 - (g_R + iR/2)(1 + Rn_0/\gamma_A)P/\gamma_A$ i $C = (g_R + iR/2)PR/\gamma_A^2 - g_C$ oraz $\gamma_A = Rn_0 + \gamma_R$. Zauważamy, że istnienie i stabilność jednorodnego stanu stacjonarnego dla którego $n_0 > 0$ (w ogólności może to być też rozwiązanie fali płaskiej) wymaga aby $\mathrm{Im}\,B > 0$ oraz $\mathrm{Im}\,C > 0$. Przy tych warunkach, zaburzenie stanu stacjonarnego z gęstością n_0 zanika eksponencjalnie, co jest przyczyną wspomnianego wcześniej wygładzania. Jakikolwiek obszar w którym gęstość jest większa niż n_0 odpowiada stratom w układzie, za to obszary z gęstością mniejszą niż n_0 odpowiadają za wzrost w równaniu (2.3). Jednakowoż, nietrywialne stany stacjonarne mogą cały czas występować w układzie [35, 43, 44]. Można sformułować kolejny niezbędny warunek na stabilność sinku, opierając się o stabilność modulacyjną (albo Benjamina-Feira) nadchodzących fal płaskich [43]. W przypadku CGLE z rzeczywistym $D > 0$ warunek ten jest spełniony w przypadku gdy $ReC < 0$ co dla równania (2.3) daje nam $P/P_{th} > (\gamma_C g_R/\gamma_R g_C)$ jak pokazano w [40]. Warto zauważyć, że jest to warunek konieczny dla stabilności, ale domena stabilności dla fal płaskich może być mniejsza [52]. Może się wydawać naturalnym traktowanie sinków jako dysypatywnych odpowiedników jasnych solitonów. Stany te są jednak od siebie jakościowo odmienne. Jasne solitony istnieją w limicie zachowawczym CGLE (2.3) gdzie $Im(C, B, D) = 0$, co reprezentuje znane nieliniowe równanie Schrödingera [55] (albo równanie Grossa-Pitajewskiego w kontekście zdegenerowanych bozonów [56]). Aby istnieć, sinki wymagają niezerowych prądów [43] oraz stabilnego tła, $Re(CD) < 0$ a jasne solitony istnieją tylko w przypadku samoogniskującym (modulacyjnie niestabilnym) gdzie $CD > 0$.

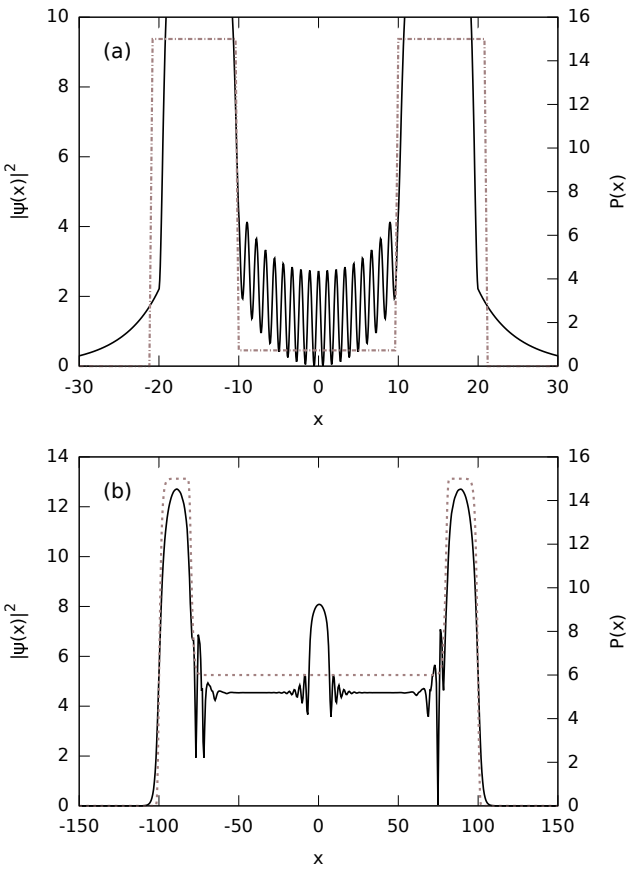
2.3.2 Sinki w modelu polarytonów ekscytonowych

Aby uzyskać rozwiązanie typu sink w modelu opisanym równaniami (2.1) należy wprowadzić źródło przeciwnie skierowanych fal. Rozważamy profil pompowania opisany poniżej stworzony przez pompowanie o zmiennej intensywności w przestrzeni.

$$P(x) = P_{\max} e^{-(x/w_b)^\alpha} - (P_{\max} - P_0) e^{-(x/w_s)^\beta} \tag{2.4}$$

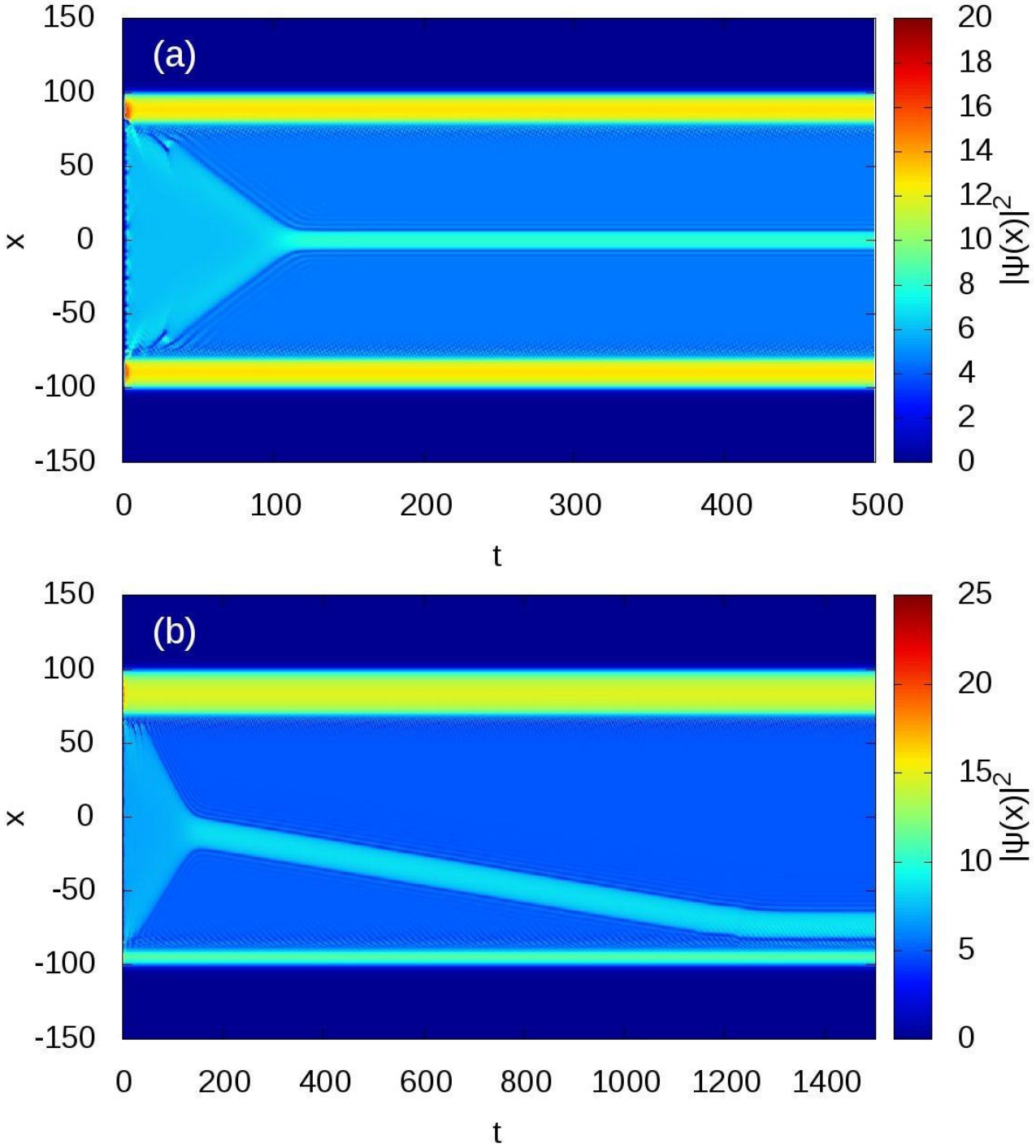
tak jak zaprezentowano na rysunku 2.2 (przerywana linia), gdzie użyto parametrów wygładzania $\alpha = 100$ i $\beta = 80$. Profil pompowania wykazuje skoki wartości $P(x)$ w $x = \pm w_b$ oraz w $x = \pm w_s$, typowe dla Super-Gaussianów w (2.4). Sinki powstają w środku obszaru gdzie intensywność pompowania wynosi $P = P_0$. Obszary boczne, gdzie wartość pompowania wynosi $P = P_{\max}$ są źródłami fal polarytonów. Przepływ jest osiągnięty dzięki oddziaływaniom odpychającym pomiędzy polarytonami w kondensacie i pomiędzy kondensatem a rezerwuarem g_C, $g_R > 0$, które tworzą efektywny potencjał w obszarze o wysokiej mocy pompowania $P = P_{\max}$. W rezultacie oddziaływania pomiędzy dwoma nielinowymi falami propagującymi w stronę środka układu, w zależności od użytych parametrów w modelu, może powstać wzór interferencyjny albo zlokalizowany sink, jak widać na rysunkach 2.2(a) oraz 2.2(b). Warto zauważyć, że w miejscu odpowiadającym przejściu pomiędzy wysokim a niskim poziomem pompowania dla $x = \pm w_s$ w 2.2(b), pojawiają się zależne od czasu oscylacje, które nie mają jednak wypływu na uformowanie się sinku. Udało się uzyskać także inne nieliniowe profile, dla innych wartości parametrów, w szczególności dla przypadku gdy źródła fal było blisko siebie. Kształty te nie miały charakteru zlokalizowanego tak jak ten ukazany na rysunku 2.2(b). Niewielka wartości współczynnika relaksacji $A = 0.1$ była niezbędna aby wytłumić mody wyższych wartości pędu w symulacji i uzyskać pożądane rezultaty.

Rysunek 2.3(a) ukazuje dynamikę procesu tworzenia się sinku. Użyte zostały warunki początkowe, w których założono zerową wartość gęstości ekscytonów $n_R(x)$ i niewielki biały szum w polu polarytonów $\psi(x)$, jednak sprawdzono, że ostateczny stan stacjonarny jest praktycznie niezależny od formy warunków początkowych. Początkowo w obszarze pomiędzy źródłami powstaje kondensat, który w przybliżeniu posiada zerowy pęd. Następnie fronty fal wygenerowanych przez źródła stopniowo poruszają się w kierunku środka, gdzie ich kolizja prowadzi



Rysunek 2.2: Kształt funkcji falowej stworzony przez fale polarytonowe emitowane przez dwa przeciwległe źródła dużej intensywności z profilem pompowania tak jak w równaniu (2.4) (przerywane linie). Wykres (a) reprezentuje stacjonarny wzór interferencyjny uzyskane poprzez całkowanie równania (2.2) w czasie, z parametrami równania $A = 0.1$, $R = 0.96$, $g_C = 0.63$, $g_R = 1.91$, $\gamma_C = 0.9$, $\gamma_R = 0.6$ oraz niską mocą pompowania. (b) Z wyższą mocą pompowania P_0 powstaje nieliniowe rozwiązanie typu sink. Odpowiadające parametry w jednostkach fizycznych: jednostka czasu $\tau = \gamma_C^{-1} = 3\,\mathrm{ps}$, jednostka długości $\xi = 1.9\,\mu\mathrm{m}$, $g = 3.9\,\mu\mathrm{eV}\mu\mathrm{m}^2$, $R = 9 \times 10^{-3}\,\mu\mathrm{m}^2\ \mathrm{ps}^{-1}$ dla $d = 2\,\mu\mathrm{m}$, $m^* = 5 \times 10^{-5} m_\mathrm{e}$, i $\beta = 0.003$.

do powstania stabilnej struktury typu sink. Fale są „zatrzymywane” przez sink w wyniku nieliniowego charakteru strat. Warto zauważyć, że sinki w ogólności nie są zupełnie stacjonarne tak jak na rysunku 2.3(a), ale mogą zostać wprawione w ruch poprzez brak równowagi w pędach emitowanych fal z przeciwległych źródeł co widać na rysunku 2.3(b). W tym wypadku sink porusza się ze stałą prędkością proporcjonalną do różnicy pomiędzy dwoma wektorami falowymi [43]. Takie zachowanie jest jakościowo inne niż to spotykane w przypadku solitonów CGLE, które są „przyczepione” poprzez zlokalizowane pompowanie [57]. Jeżeli równowaga pędów zostanie przywrócona po jakimś czasie, sink zatrzyma się w nowej pozycji. Sink może zostać także zatrzymany po dojściu do słabszego źródła tak jak widać na rysunku 2.3(b).



Rysunek 2.3: (a) Ewolucja w kierunku stanu stacjonarnego zaczynając od małego szumu. Parametry są takie same jak w podpisie do rysunku 2.2(b). (b) Przypadek niesymetrycznego profilu pompowania, gdzie występuje różnica w pędach pomiędzy falami pochodzącymi z różnych źródeł. Sink porusza się w kierunku słabszego źródła gdzie zostaje zatrzymany ale nie ulega zanikowi.

2.4 Domena istnienia i właściwości sinków

W tym rozdziale zostanie systematycznie opisane stacjonarne rozwiązanie typu sink w modelu polarytonów ekscytonowych z jednorodnym pompowaniem, $P(x) = const$. Podstawiamy $\psi(x,t) = \phi(x)e^{-i\mu t}$ i $n_R(x,t) = n_R(x)$ do równania (2.1) aby uzyskać pojedyncze zwyczajne równanie różniczkowe na profil stanu stacjonarnego,

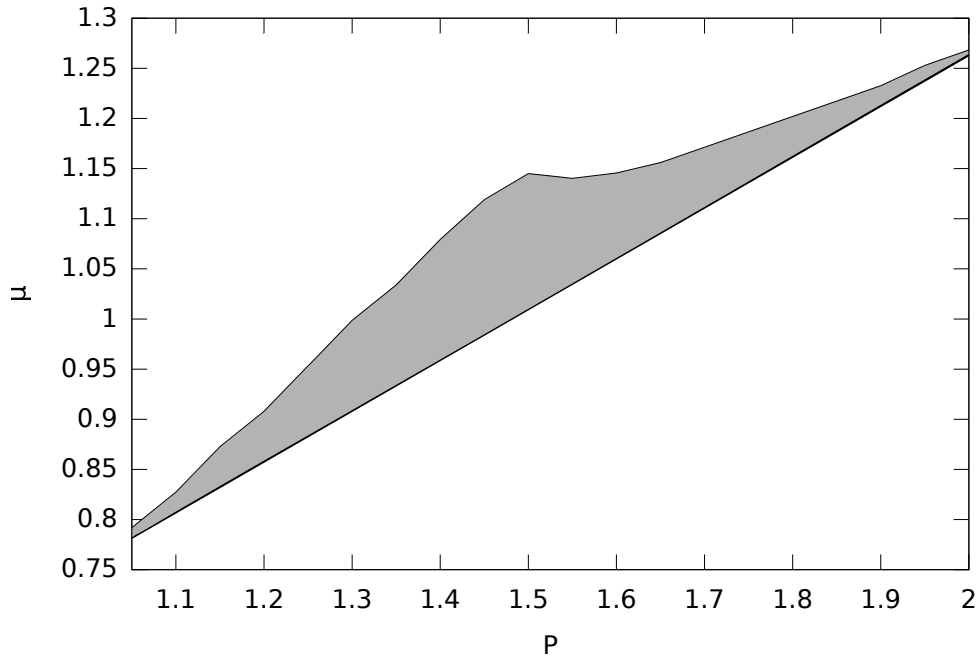
$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = -\mu\phi + g_C|\phi|^2\phi + g_R\frac{P}{\gamma_R + R|\phi|^2}\phi + \frac{i}{2}\frac{RP}{\gamma_R + R|\phi|^2}\phi - \frac{i}{2}\gamma_C\phi \tag{2.5}$$

Powyższe równanie zostało uzupełnione o warunki brzegowe. Dla punktu $x = 0$, który został uznany za punkt symetrii, bez utraty ogólności, pierwsza pochodna jest równa zero, $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x = 0$. Dla punktu $x = +\infty$ rozwiązanie zbiega do rozwiązania fali płaskiej z normą równą $|\phi|^2 = n_0 = (P - P_{th})/\gamma_C$ (w rzeczywistości narzucamy ten warunek na ostatni punkt siatki obliczeniowej). Rozwiązano zagadnienie brzegowe przy pomocy metody strzałów wykorzystując algorytm minimalizacyjny Newtona (opisany w sekcji 2.4.1). Zakładamy $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}|_{x=0} = 0$ zmieniając wartość $\phi(0)$ dla której rozwiązujemy (2.5) algorytmem Runge-Kutta na przedziale $0 < x < x_{\max}$. Metoda Newtona jest używana w celu znalezienia rozwiązania, które jest zgodne z warunkami brzegowymi $|\phi|^2 = n_0$ w punkcie $x = x_{\max}$ z pewną tolerancją ϵ. Następnie przedział rozwiązania $x_{\max}$ zostaje delikatnie powiększony i procedura zostaje powtórzona. Metoda ta okazała się być bardzo efektywnym sposobem znalezienia stanu zlokalizowanego na dużym przedziale x. Rysunek 2.4 reprezentuje diagram fazowy pokazujący obszar istnienia rozwiązania typu sink w przestrzeni parametrów P i μ z ustalonymi wartościami pozostałych parametrów równania. Zaciemniony obszar odpowiada parametrom dla których algorytm zbiegł do poprawnego rozwiązania. Obszar ten jest od dołu ograniczony przez naturalne minimum określone przez potencjał chemiczny dla stanu stacjonarnego, który odpowiada stanowi nieskończonego kondensatu, $\phi(x) = const$.

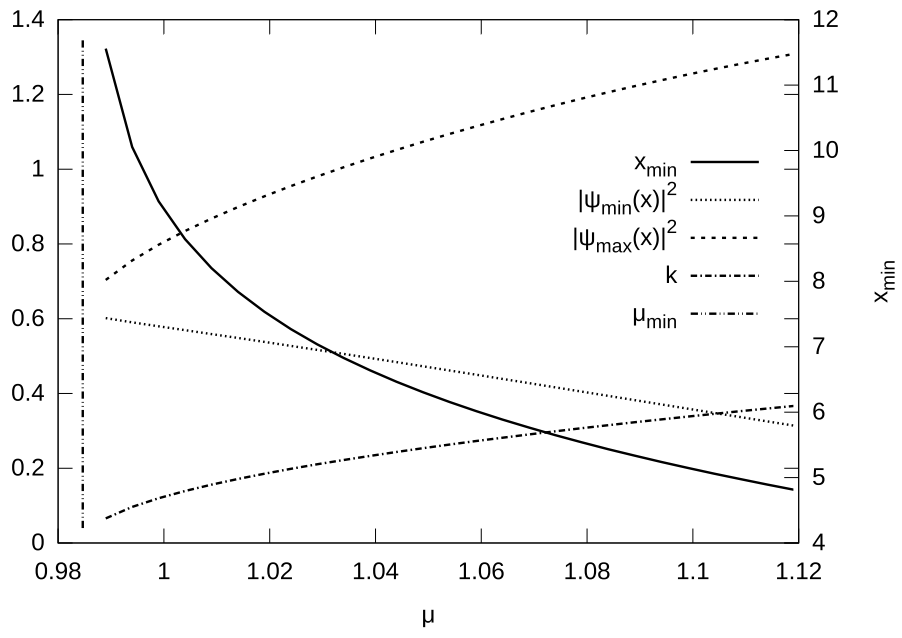
$$\mu_{\min} = g_C n_0^2 + \frac{P g_R}{(\gamma_R + R n_0^2)}. \tag{2.6}$$

Największy zakres μ dla którego istnieje rozwiązanie typu sink występuje dla średniej intensywności pompowania $P \approx 1.5P_{\mathrm{th}}$.

Obszar μ wydaje się być mały, jednak w rzeczywistości odnosi się on do szerokiego zakresu



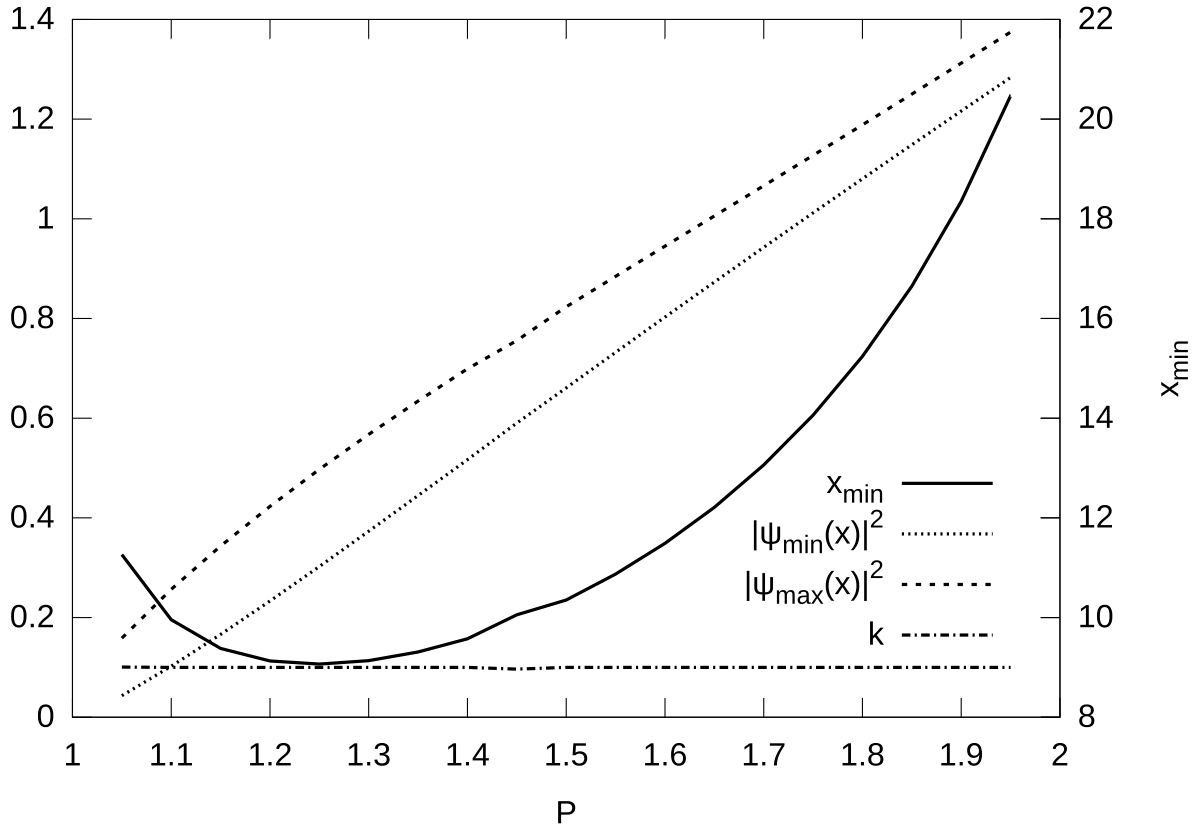
Rysunek 2.4: Diagram fazowy określający parametry dla których istnieje stacjonarne rozwiązanie typu sink znalezione dla równania (2.5) (szary obszar). Stałe parametry równania to $R = 0.76, g_C = 0.38, g_R = 0.76, \gamma_C = 0.75, \gamma_R = 1$.



Rysunek 2.5: Wykres wartości $|\psi_{\min}(x)|^2$, $|\psi_{\max}(x)|^2$, x_1 i wektora falowego k (warto spojrzeć na wykres. 2.1 dla przypomnienia oznaczeń). W tym przypadku utrzymywana jest stała wartość $P = 1.45$ ale zmieniana jest wartość potencjału chemicznego μ. $x_{\min}$ szybko maleje sugerując, że dla wyższych μ sink staje się coraz bardziej pofalowany. Zależność $|\psi_{\min}(x)|^2$ i $|\psi_{\max}(x)|^2$ od μ wskazuje na to ,że „wysokość” sinku wzrasta dla wyższych μ.

wartości wektorów falowych nadchodzących fal, od około 0 do około 6, tak jak na rysowano na rysunku 2.5 linią kropkowano-przerywaną. Linia pionowa na wykresie odnosi się do minimalnej wartości μ, opisanej przez równanie (2.6). Zależność między potencjałem chemicznym a wektorem falowym nadchodzących fal może zostać wyznaczona poprzez przejście do granicy $x \to \pm\infty$ z sinku, dla którego równanie (2.5) redukuje się do $\mu = k^2 + g_C n_0^2 + P g_R/(\gamma_R + R n_0^2)$ pod warunkiem zachowania równowagi pomiędzy stratami a pompowaniem w układzie. Jak widać z diagramu fazowego 2.4, warunkiem koniecznym istnienia sinku jest, aby energia kinetyczna była znacznie mniejsza niż nieliniowa energia fali. Linie przerywana i kropkowana na wykresie 2.5 pokazują minimum i maksimum gęstości sinku. Zwiększając μ, co przenosi się na zwiększone wektory k nadchodzących fal, sink staję się większy i bardziej zmodulowany. Z drugiej strony, w granicy $\mu = \mu_{\min}$ przechodzi on gładko w płaski stan jednorodny $\phi(x,t) = n_0 e^{-i\mu_{\min} t}$. Pozycja pierwszego minimum profilu gęstości $x_{\min}$ (linia ciągła) zmniejsza się wraz ze zwiększaniem μ, co jest związane ze zwiększającą się gęstością prążków interferencyjnych w ogonach sinku.

Wykres 2.6 opisuje te same zależności co wykres poprzedni, lecz ze wzrastającą mocą pompowania P. Potencjał μ był podtrzymywany nieznacznie powyżej $\mu_{\min}$, co odpowiada stałej wartości k. W tym przypadku zwiększenie P prowadzi do zwiększenia średniej gęstości sinku prawie bez żadnej zmiany w różnicy $|\phi_{\max}|^2 - |\phi_{\min}|^2$. Z drugiej strony wartość $x_{\min}$ wykazuje charakter silnie niemonotoniczny, malejąc dla małych P i rosnąc dla dużych P. Świadczy to o tym, że w przypadku małego k pozycja pierwszego minimum nie odnosi się w prosty sposób do nadchodzącego wektora falowego k.



Rysunek 2.6: Wykres wartości $|\psi_{\min}(x)|^2$, $|\psi_{\max}(x)|^2$, x_1 i wektora falowego k (warto spojrzeć na wykres. 2.1 dla przypomnienie oznaczeń). Na tym wykresie zmienia się wartość P jednocześnie utrzymując wartość μ niewiele powyżej progu $\mu_{\min}$ dla których występuje rozwiązanie typu sink. Zależność $|\psi_{\min}(x)|^2$, $|\psi_{\max}(x)|^2$ od P wskazuje, że wysokość sinku jest w przybliżeniu stała gdy jednocześnie zwiększa się gęstość tła n_0 wraz ze wzrostem P.

2.4.1 Metoda znajdowania rozwiązań typu sink

Wyprowadzenie algorytmu Newtona-Raphsona polega na rozwinięciu funkcji $f(r)$ w szereg wokół pewnego punktu $r = x_0+\delta$. Ponieważ δ jest małe, wystarczy nam liniowa część rozwinięcia. Jako że poszukujemy miejsca zerowego funkcji, ostatecznie $f(r) = 0$ [58].

$$\begin{aligned} f\,(r) &= f\,(x_0+\delta) \approx f(x_0) + f^{'}(x_0)\delta + \tfrac{f^{''}(x_0)}{2}\delta^2 + ... \\ f\,(r) &= 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Wykorzystując fakt, że $r = x_0 + \delta$ udało się uzyskać iteracyjną wersje algorytmu do poszukiwania miejsca zerowego funkcji. Równanie (2.9) reprezentuje uogólnioną rekurencyjną wersję algorytmu, w którym pochodna funkcji została przybliżona różnicowo $f^{'}(x_i) = \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$.

$$\begin{aligned} \delta &= -\tfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ r = x_0 + \delta &\approx x_0 - \tfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x_1 &= x_0 - \tfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$x_{i+i} = x_i - \tfrac{f(x_i)(x_i-x_{i-1})}{f(x_i)-f(x_{i-1})} \tag{2.9}$$

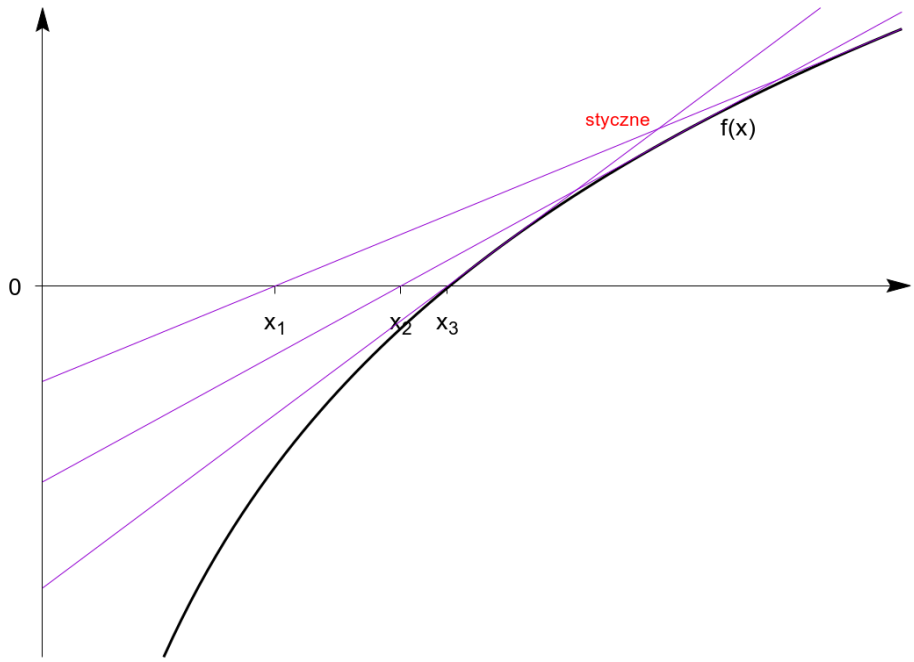
W podobny sposób możliwe jest uzyskanie algorytmu Newtona-Raphsona dla przypadku funkcji zależnej od wielu zmiennych [58].

$$\begin{aligned} F_i\,(x_1, x_2, x_3, ..., x_N) &= 0, i = 1, 2, 3..., N. \\ F_i\,(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) &= F_i\,(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{N} \tfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\delta x_j + O\,(\delta x^2) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Można ten wzór zapisać w postaci macierzowej gdzie $\mathbf{J}$ jest Jakobianem $J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\,(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) &= \mathbf{F}\,(\mathbf{x}) + \mathbf{J}\delta\mathbf{x} + O\,(\delta\mathbf{x}^2) \\ \mathbf{F}\,(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Uzyskujemy równanie macierzowe, które można rozwiązać przy pomocy jednego ze znanych algorytmów. Po wyznaczeniu $\delta\mathbf{x}$ dodajemy wynik do starej wartości $\mathbf{x}_i$ uzyskując iteracyjnie kolejne przybliżenie wartości miejsca zerowego.



Rysunek 2.7: Obrazowe przedstawienie algorytmu Newtona. Każde kolejne iteracyjne rozwiązania przybliża nas do właściwego miejsca zerowego.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\delta\mathbf{x} &= -\mathbf{F} \\ \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + \delta\mathbf{x} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Numeryczną techniką wyszukiwania rozwiązania typu sink zastosowaną w tej pracy jest metoda strzałów, która polega na zredukowaniu zagadnienia brzegowego do zagadnienia początkowego i wykonywaniu, odpowiedniej ilości strzałów aby uzyskać rozwiązanie zgodne z warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= A \\ \phi(b) &= B \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\phi''(x) = g(r, \phi(r), \phi'(r)), \quad \phi(0) = \phi_0 \tag{2.14}$$

Pierwsze dwa strzały są szacunkowe, następnie wykorzystując algorytm Newtona poszukiwane jest właściwe rozwiązanie. Rozwiązanie jest poszukiwane na przedziale $x \in [0, b]$.

Jako, że dla $\phi(0)$ sink osiąga maksimum amplitudy, wartości pierwszych pochodnych dla każ-

dego strzału wynoszą zero. Równanie (2.5) jest następnie rozwiązywane dla podanych warunków początkowych aż do punktu b. Jeżeli wynik jest z dokładnością do ϵ bliski zeru wtedy uzyskaliśmy poszukiwane rozwiązanie. W przeciwnym wypadku, przy pomocy algorytmu Newtona poszukuje się nowej wartości $\phi(0)$. Jako, że kondensat w stanie stacjonarnym posiada niezerową gęstość, aby algorytm można było zastosować poprawnie należało pomniejszyć gęstość $|\phi(b)|$ o gęstość stanu stacjonarnego:

$$|\phi_\infty(b)|^2 = \frac{P}{\gamma} - \frac{\gamma_R}{R} \tag{2.15}$$

Wówczas algorytm Newtona będzie prowadzić do znalezienia rozwiązania dla którego $|\phi(b)|^2 = |\phi_\infty|^2$. Ze względu na nieliniowość równania (2.5) w programie wykorzystano bibliotekę GNU MPC, która pozwalała na obliczenia z wykorzystaniem liczb zespolonych z wysoką precyzją, co było niezbędne do zachowania stabilności rozwiązania numerycznego. Kolejny zabiegiem było rozpoczynanie poszukiwań na małym przedziale $[0, b]$. Gdy udało się na nim znaleźć poprawne rozwiązanie, rozszerzano obszar i cała procedura rozpoczynała się od początku.

2.5 Rozwiązania analityczne

Jeżeli „wysokość” sinku jest relatywnie mała w porównaniu do gęstości stanu stacjonarnego, $||\psi(x,t)| - n_0| \ll n_0$, oraz amplituda $|\psi(x,t)|$ zmienia się powoli w przestrzeni, można znaleźć rozwiązanie przybliżone [59]. Przepisujemy rozwiązanie stanu stacjonarnego dla jednorodnie pompowanego kondensatu, używając transformacji Madelunga dla $\psi(x,t)$.

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= a(x)e^{i(\varphi(x)-\mu t)}, \\ n_R(x,t) &= n_R(x), \end{aligned} \tag{2.16}$$

gdzie $a(x)$ jest amplitudą, $\varphi(x)$ jest fazą a μ jest potencjałem chemicznym kondensatu. Zaniedbując pochodne przestrzenne $a(x)$, równanie (2.2) można przepisać do postaci

$$i\mu = i\left[ga^2(x) + g_R n_R(x) + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x)\right)^2\right] - \left[\frac{1}{2}\left(Rn_R(x) - \gamma_C\right) - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\varphi(x)\right] \tag{2.17}$$

część rzeczywista równania (2.17), którą można zinterpretować jako równanie ciągłości, daje

$$n_R(x) = \frac{2}{R}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\varphi(x)\right) + \frac{\gamma_C}{R} \tag{2.18}$$

Z drugiej strony, rozwiązując równanie na gęstość rezerwuaru (2.2) dla stanu stacjonarnego otrzymujemy

$$n_R(x) = \frac{P}{a^2(x)R + \gamma_R}. \tag{2.19}$$

Rozwijamy to równanie do drugiego rzędu w szereg Taylora wokół $a^2(x) = n_0 = (P/\gamma_C) - (\gamma_R/R)$

$$n_R(x) = -\frac{\gamma_C\left(a^2(x)R\gamma_C - 2PR + \gamma_C\gamma_R\right)}{PR^2} \tag{2.20}$$

Porównując równania (2.18) i (2.20) otrzymujemy

$$a^2(x) = -\frac{2PR\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\varphi(x)\right) - PR\gamma_C + \gamma_C\gamma_R}{R\gamma_C^2} \tag{2.21}$$

Dla części urojonej równania (2.17), używając (2.18) i (2.21) dostajemy

$$\begin{aligned}\mu &= -\frac{g}{R\gamma_C^2}\left[2PR\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\varphi(x)\right) - PR\gamma_C + \gamma_C^2\gamma_R\right] + \\ &+ g_R\left[\frac{2}{R}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\varphi(x)\right) + \frac{\gamma_C}{R}\right] + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x)\right)^2. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Definiując $\xi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\varphi(x)$ dostajemy równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$2\left(\frac{g_R}{R} - \frac{gP}{\gamma_C^2}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\xi(x) + \xi^2(x) + \left[g\left(\frac{P}{\gamma_C} - \frac{\gamma_R}{R}\right) + \frac{g_R\gamma_C}{R} - \mu\right] = 0 \tag{2.23}$$

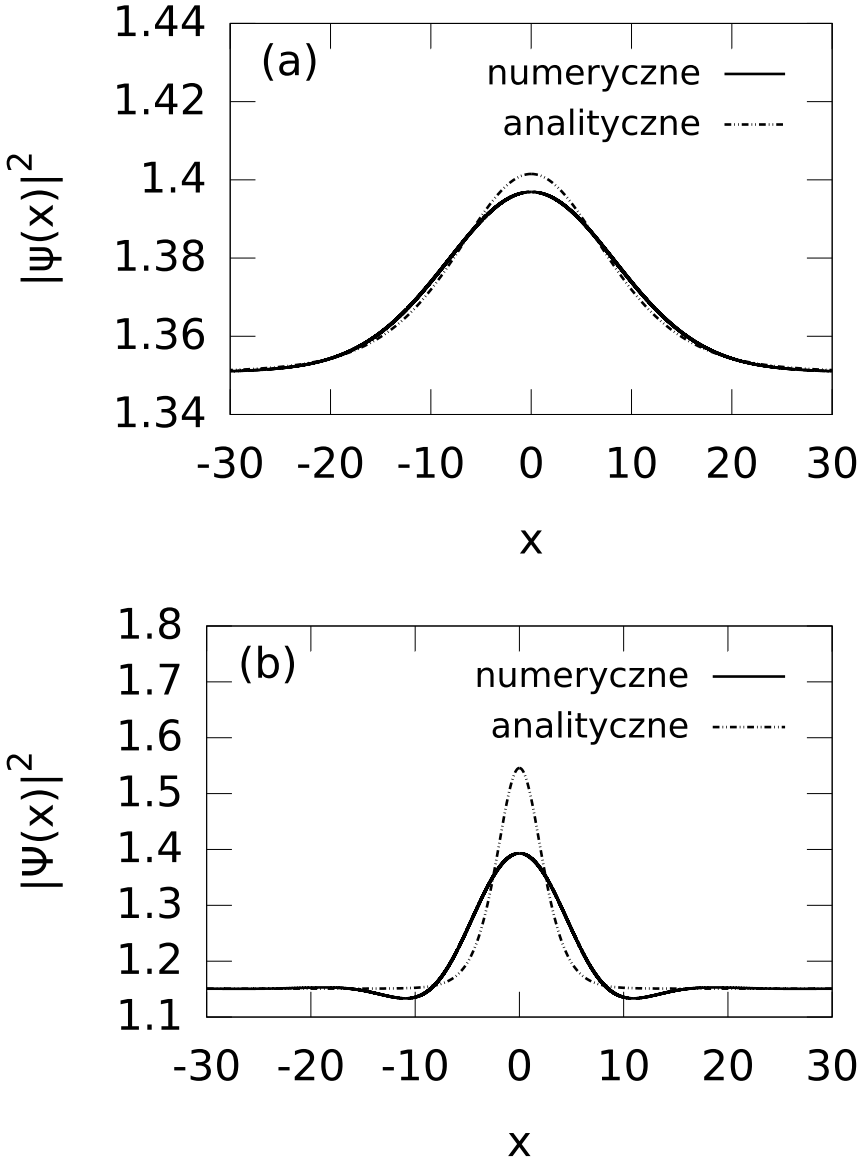
Z rozwiązaniem postaci

$$\xi(x) = \frac{\sqrt{\delta}}{R\gamma_C}\,\mathrm{tgh}\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\delta}}{\alpha}x\right), \tag{2.24}$$

gdzie $\delta = R(PRg\gamma_C - R\mu\gamma_C - g\gamma_C^2\gamma_R + g_R\gamma_C^3)$ i $\alpha = gPR - g_R\gamma_C^2$. Obliczając amplitudę korzystając z (2.21) ostatecznie otrzymujemy

$$a^2(x) = -\frac{1}{R\gamma_C^2}\left[\frac{\delta P}{\alpha}\left\{1 + \mathrm{tgh}^2\left(\frac{1}{2}\frac{\gamma_C\sqrt{\delta}}{\alpha}x\right)\right\} + -\ PR\gamma_C + \gamma_C^2\gamma_R\right] \tag{2.25}$$

Porównanie rozwiązania analitycznego i numerycznego uzyskanego przy pomocy metody strzałów pokazano na wykresie 2.8. Udało się uzyskać dobrą zgodność dla małych k, gdy profil sinku jest płaski i szeroki, bez oscylacji w ogonie. Wyraźnie widać jednak, że oscylacji ogonu nie da się odtworzyć przy pomocy rozwiązania przybliżonego (2.25), co jest pokazane na wykresie 2.8(b).



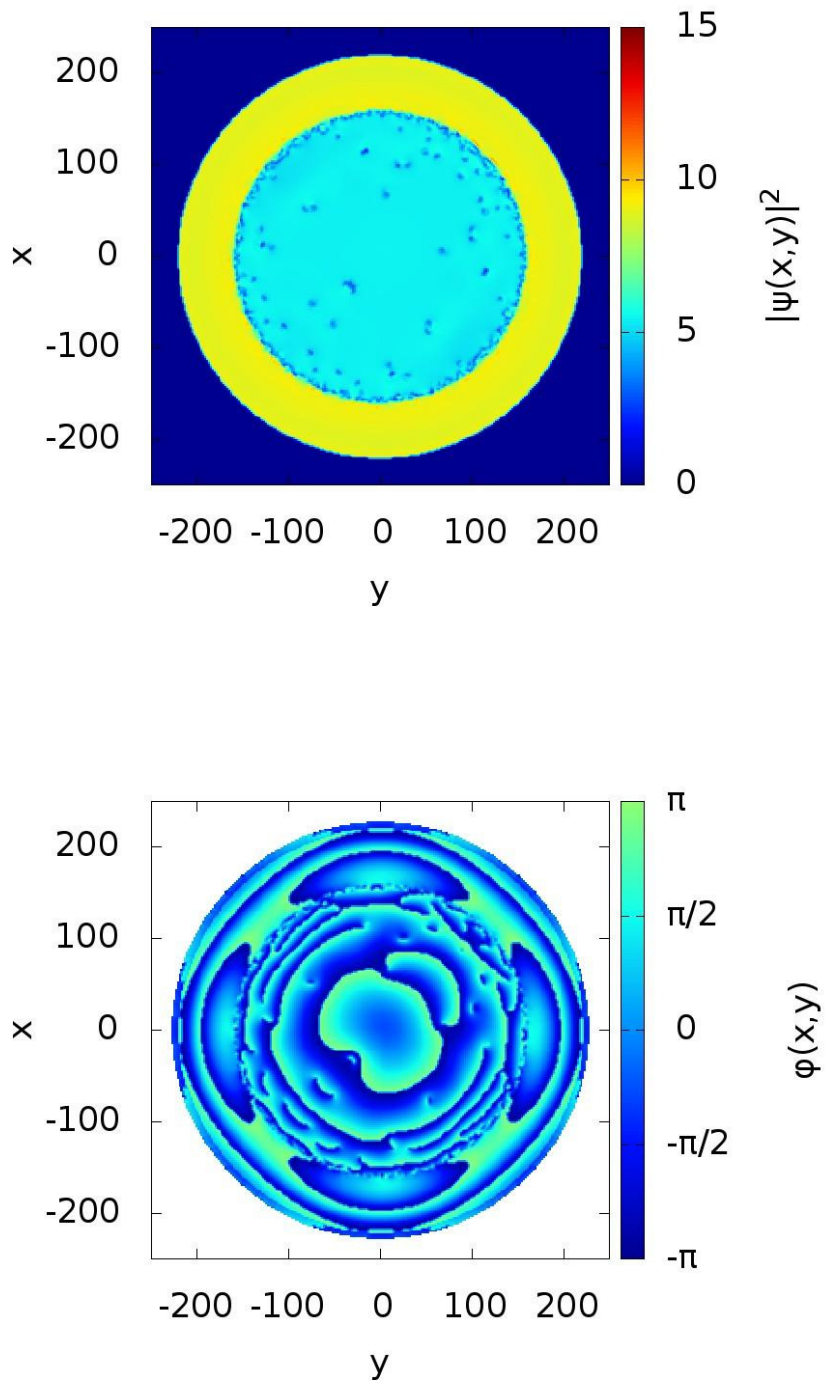
Rysunek 2.8: Porównanie rozwiązania numerycznego otrzymanego metodą strzałów z przybliżonym rozwiązaniem analitycznym dla dwóch zestawów parametrów. Parametry dla obu przypadków $R = 0.76$, $g = 0.38$, $g_R = 2g$, $\gamma_C = 0.75$, $\gamma_R = 1$. Dla przypadku (a) $P = 2.0$ i $\mu = 1.2683$. Dla przypadku (b) $P = 1.85$ i $\mu = 1.2173$.

2.6 Przypadek dwuwymiarowy

Dodatkowo przeprowadzono serię symulacji, której celem było zbadanie czy jest możliwe uzyskanie rozwiązań typu sink w dwuwymiarowej wersji modelu polarytonów ekscytonowych opisanego równaniami

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + g_C|\psi|^2 + g_R n_R + \frac{i}{2}\left(R n_R - \gamma_C\right)\right]\psi$$
$$\frac{\partial n_R}{\partial t} = P(x,y) - \left(\gamma_R + R|\psi|^2\right) n_R \tag{2.26}$$

gdzie $g_{R,C}$, $\gamma_{R,C}$, R, i $P(x,y)$ to bezwymiarowe parametry uzyskane z fizycznych parametrów w podobny sposób jak dla przypadku jednowymiarowego. Profil pompowania dobrany do tego zagadnienia miał kształt koła o promieniu r_1, w którym wartość mocy pompowania wynosiła $P = P_0$, otoczonego przez pierścień o promieniu wewnętrznym r_1 i zewnętrznym r_2 oraz mocy pompowania $P = P_{\max}$. Na wykresie 2.9 pokazano typowy stan uzyskany przy pomocy ewolucji małego szumu z warunków początkowych oraz tego typu profilu pompowania. W ogólności, po pewnym czasie ewolucji, spontanicznie powstawała mniejsza lub większa ilość wirów, przez to stan stacjonarny nie był możliwy do osiągnięcia nawet przy dużych czasach całkowania. Wiry mogą pojawić się spontanicznie podczas kondensacji w procesie podobnym do mechanizmu Kibble'a-Żurka [60–63] oraz poprzez powstawanie superprądów w układach niejednorodnych [15, 64]. Pomimo wypróbowania wielu kombinacji parametrów oraz asymetrycznych profilów pompowania, nie udało się uzyskać żadnych stabilnych struktur, które przypominałyby jednowymiarowe sinki z poprzednich podrozdziałów. Warto nadmienić, że podobny profil pompowania został użyty w kilku eksperymentach [65–67], w których zaobserwowano wiry albo rozwiązania bardziej skomplikowane. Jednakże, struktury uzyskane w eksperymentach były w większości przypadków regularne, co sugeruje, że odpowiadają one liniowemu reżimowi tak jak na wykresie 2.2(a). W przypadku silnie nieliniowych oddziaływań, dało się zaobserwować regularne łańcuchy wirów dla rezonansowego pompowania układu [65]. W zależności od parametrów systemu, łańcuchy te mogły zostać zniszczone przez spontanicznie kreowane wiry powstałe z niestabilności hydrodynamicznej, co jest spójne z naszymi symulacjami.



Rysunek 2.9: Prezentacja dwuwymiarowego rozwiązania równania (2.26) po długim czasie ewolucji $t = 1600$ wygenerowane przez profil pompowania w kształcie pierścienia. Wiry kwantowe są wyraźnie widoczne na wykresie gęstości (góra) i fazy (dół) $\psi(x, y, t)$. Rozwiązanie typu sink nie powstało, z powodu proliferacji wirów. Parametry równania to $A = 0.1$, $R = 0.96$, $g_C = 0.63$, $g_R = 1.91$, $\gamma_C = 1$, $\gamma_R = 0.6$ oraz $P_0 = 6$, $P_{\max} = 10$,$r_1 = 155$, $r_2 = 220$.

2.7 Wnioski

Pokazano istnienie i stabilność rodziny rozwiązań typu sink w otwarto-dysypatywnym modelu polarytonowym. W przeciwieństwie do jasnych solitonów z modelów zachowawczych, sinki istnieją w przypadku oddziaływań odpychających i powstają poprzez zderzenie nadbiegających z naprzeciwka fal. Przestudiowano dynamikę tworzenia się sinków w realistycznym jednowymiarowym modelu z odpowiednio dobranym profilem pompowania. Przestudiowano obszar istnienia rozwiązania typu sink w przestrzeni parametrów oraz ich fizyczne właściwości. Wyprowadzono przybliżone rozwiązanie analityczne opisujące kształt sinku, dokładne dla przypadku gdy sink nie posiada oscylującego ogona. W przypadku dwuwymiarowym, dla profilu pompowania w kształcie pierścienia, nie znaleziono rozwiązania typu sink z powodu spontanicznie tworzących się wirów.

Rozdział 3

Kinetyka porządkowania się fazy

3.1 Wstęp

Jednym z ważniejszych osiągnięć fizyki statystycznej jest zdolność do opisu skomplikowanego systemu złożonego z wielu cząsteczek w przy pomocy ograniczonej ilości zmiennych opisujących ich kolektywne zachowanie. Uniwersalność przejść fazowych jest jaskrawym przykładem tego typu redukcji, gdzie wiele fizycznych modeli zostało podzielonych na skończoną liczbę klas uniwersalności scharakteryzowanych pewnymi właściwościami symetrii i krytycznymi prawami skalowania. Przejściu fazowemu ze stanu nieuporządkowanego do uporządkowanego często towarzyszy tworzenie się defektów takich jak ściany domenowe, wiry i struny [60, 61]. W realistycznej sytuacji takie defekty zanikają w czasie a cały system podlega stopniowemu porządkowaniu się fazy [68]. W tej nierównowagowej, występującej w późnych etapach ewolucji dynamice, system często wykazuje uniwersalność, którą można opisać pojedynczą skalą długości $L(t)$ dyktującą czasową ewolucję wszystkich kluczowych wielkości takich jak funkcja korelacji. Znajomość symetrii i charakteru dominującego procesu łączenia się i wzrostu domen jest wystarczający do określenia ewolucji tej skali długości. Teoria uniwersalnego skoagulowania została z powodzeniem zastosowana do szerokiej gamy systemów, od hutnictwa i separacji faz cieczy [69, 70] do systemów biologicznych i dynamiki opinii [71].

W ostatnim czasie rozszerzono klasyczną koncepcję kinetyki porządkowania się fazy do zagadnień kwantowych w badaniach atomowych kondensatów Bosego-Einsteina [72–76]. Znaleziono powiązania z odpowiadającymi układami klasycznymi dla przypadków bezspinowych [72]

oraz spinorowych nadciekłych gazów [75–79] W dziedzinie płynów polarytonowych [5, 10, 17] zaobserwowano spontaniczne powstawanie wirów podczas nieadiabatycznej kondensacji [62] i przebadano je teoretycznie w kontekście mechanizmu Kibble'a-Żurka [63, 80]. Dynamika wirów była tematem wielu badań jak na przykład [65, 81–91], a proces anihilacji par wir-antywir został zaobserwowany eksperymentalnie w [92–94]. Jednakże proces uniwersalnej dynamiki wzrostu domen nie został jeszcze przebadany.

Celem tego rozdziału jest zweryfikowanie hipotezy skalowania w modelu nierezonansowo pompowanego kondensatu polarytonowego [41, 95–97]. Rozważamy dwa zestawy parametrów takich jak stałe materiałowe, moc pompowania itd. Udało się znaleźć przykłady uniwersalnego porządkowania się fazy z kompletnym kolapsem funkcji korelacji po przeskalowaniu współrzędnych przestrzennych przez skale długości $L(t)$. Skala długości ewoluuje zgodnie z prawem skalowania zawierającym wykładnik z zależny od parametrów. W pierwszym wypadku, $z \approx 2$ wraz z logarytmiczną poprawką, tak jak przewidziano poprzednio dla przypadku dwuwymiarowego pola wektorowego albo zespolonego pola z dynamiką czysto dyfuzyjną [68, 98]. W drugim przypadku, dynamiczne skalowanie $L(t)$ okazało się być takie same jak ustalone wcześniej skalowanie dla zachowawczych nadciekłych płynów [72, 79], gdzie $z \approx 1$. Pokazuje to, że układy polarytonowe potrafią wykazywać różne typy uniwersalnych dynamik, co można osiągnąć poprzez zmianę parametrów materiałowych próbki.

Warto zauważyć, że rozważamy tutaj zmieniające się w czasie właściwości układu, który nagle przeszedł przez przejście fazowe, a nie krytyczne właściwości samego przejścia fazowego. Drugi przypadek został głęboko przebadany doświadczalnie [16, 97, 99] jak i teoretycznie [53, 96]. Postuluje się, że systemy polarytonowe wykazują swego rodzaju dysypatywne przejście typu Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT), gdzie krytyczny wykładnik może się różnić od uzyskanego w równowadze termodynamicznej [16, 96, 97, 99]. Zakładamy, że układ jest wystarczająco daleko od punktu krytycznego po stronie uporządkowanej przejścia fazowego, więc zbiega do stanu w przybliżeniu bez defektów.

Idea uniwersalnej dynamiki wzrostu domen jest ugruntowana na bazie hipotezy skalowania, która postuluje, że dla późnych czasów istnieje jedna charakterystyczna długość skalowania opisująca długoskalowe właściwości układu [68, 70]. Konfiguracja defektów pozostaje nie zmieniona w czasie, w sensie statystycznym, jeżeli przeskaluje się współrzędne defektów przez skalę

długości, która zmienia się zgodnie z prawem skalowania $L(t) \sim t^{1/z}$. Tutaj z jest nierównowagowym dynamicznym wykładnikiem, który w ogólności różni się od dynamicznego (*krytycznego*) wykładnika przejścia fazowego, który był odpowiedzialny za tworzenie się defektów [60, 61, 100]. Rozważmy funkcję korelacji pierwszego rzędu z zerowym przesunięciem w czasie. Z powyższego wynika, że następujace skalowanie jest słuszne:

$$g^{(1)}(\mathbf{d}, t) = \frac{1}{N} \int \langle \psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r} + \mathbf{d}, t)\rangle \mathrm{d}\mathbf{r} = f(d/L(t)) \tag{3.1}$$

gdzie $d = |\mathbf{d}|$ i $f(0) = 1$, dla $N = \langle \int |\psi|^2 \mathrm{d}\mathbf{r}\rangle$. Hipoteza skalowania została szczegółowo przebadana tylko w kilku przypadkach, symulacje numeryczne wskazują jej słuszność w odniesieniu do wielu fizycznych układów [68].

Wartość wykładnika z zależy od wymiarowości układu, charakteru procesu łączenia się domen (dyfuzyjny, inercyjny, itd.), symetrii i praw zachowania [68]. Dla niezachowawczych pól skalarnych, takich jak w modelu Isinga albo modelu A dyfuzji-reakcji [101] współczynnik ten przyjmuje wartość $z = 2$. W przypadku zachowawczych pól skalarnych proces zgrubiania jest wolniejszy przez co współczynnik wynosi $z = 3$, co można zrozumieć jako efekt zredukowanej ilości dostępnych stanów pośrednich [75]. Kiedy transport jest inercyjny zamiast dyfuzyjnego, przewiduje się szybsze skalowanie ze współczynnikiem $z = 3/2$ [77, 102].

W przypadku pól wektorowych albo zespolonych, czynnikiem często dominującym dynamikę porządkowania się fazy są defekty topologiczne. Prowadzi do innych wartości z, i w niektórych przypadkach do wystąpienia poprawki logarytmicznej czego najlepszym przykładem jest dwuwymiarowy model XY wykazujący zależność $L(t) \sim (t/\ln t)^{1/2}$ [98, 103–106]. Dla podklasy jaką są modele dyfuzyjne, argumentacja oparta o porównanie lokalnej i globalnej zmiany energii pozwala przewidzieć prawo wzrostu w przypadku ogólnym [107, 108]. Metody grup renormalizacji także mogą być użyteczne, jednakże nie są w stanie przewidzieć poprawki logarytmicznej [68, 107], która może być znacząca [104].

3.2 Model

Rozważamy funkcję falową nierezonansowo pompowanego kondesatu polarytonowego $\psi(\mathbf{x},t)$ sprzężoną z rezerwuarem opisanym przez pole gęstości $n_R(\mathbf{x},t)$ [41, 109, 110]

$$\begin{aligned} i\mathrm{d}\psi &= \left[-\frac{\hbar D}{2m^*}\nabla^2 + \frac{g_C}{\hbar}|\psi|^2 + \frac{g_R}{\hbar}n_R + \frac{i}{2}\left(Rn_R - \gamma_C\right)\right]\psi\mathrm{d}t + \mathrm{d}W \\ \frac{\partial n_R}{\partial t} &= P - \left(\gamma_R + R|\psi|^2\right)n_R \end{aligned} \tag{3.2}$$

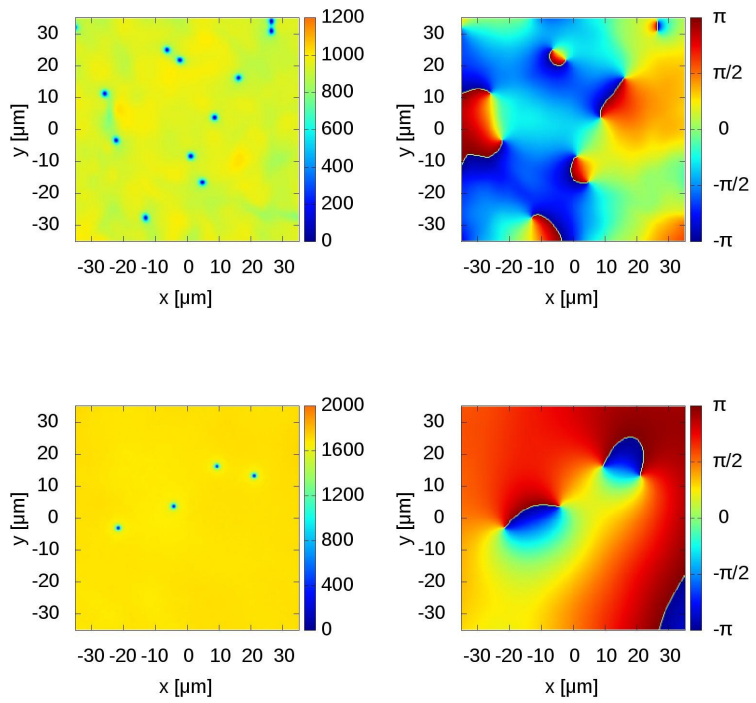
gdzie P jest stałą określającą moc źródła kreującego ekscytony przez zewnętrzne pompowanie optyczne albo elektryczne, m^* to masa efektywna dolnego polarytonu, γ_C i γ_R to współczynniki strat kondensatu i rezerwuaru, R to stała stymulowanego rozproszenia z rezerwuaru do kondensatu, i ostatecznie g_C, g_R to stałe oddziaływań pomiędzy polarytonami i rezerwuarem a kondensatem. Wprowadzamy także $D = 1 - iA$ z A będącą niewielką stałą odpowiadającą za rozproszenie energii w kondensacie [51–54]. Alternatywnie można wprowadzić zespolony współczynnik przed pochodną czasową [111, 112]. Podany wyżej model fenomenologiczny został z sukcesem wykorzystany w opisie wielu doświadczeń związanych z kondensatami polarytonów-ekscytonowych [62, 88]. Człon odpowiadający za zespolony szum $\mathrm{d}W$, wynikający z zaburzenia związanego z procesem wychodzenia i wchodzenia cząsteczek do kondensatu można wyprowadzić zgodnie z przybliżeniem tzw. truncated Wigner [110]

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{d}W(\mathbf{x})\mathrm{d}W^*(\mathbf{x}')\rangle &= \frac{\mathrm{d}t}{2(\Delta x)^d}(Rn_R + \gamma_C)\delta_{\mathbf{x},\mathbf{x}'}, \\ \langle \mathrm{d}W(\mathbf{x})\mathrm{d}W(\mathbf{x}')\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

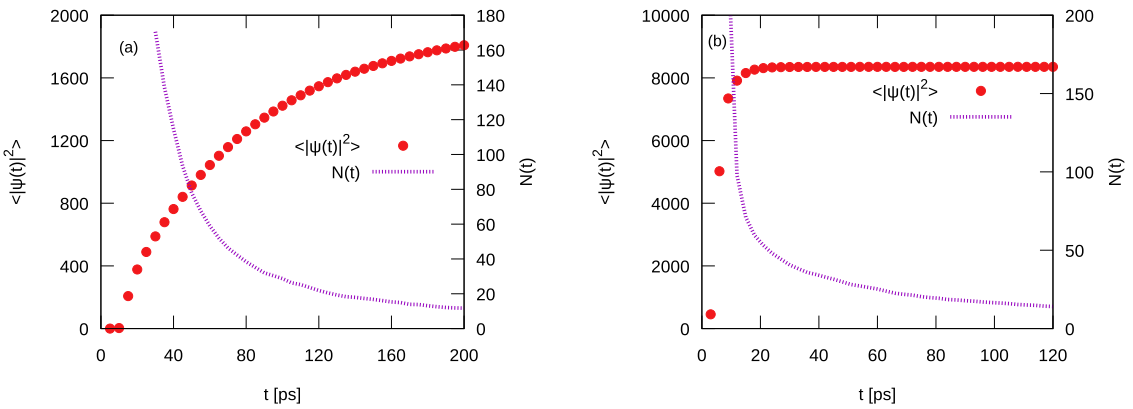
W przypadku bez szumu, otrzymujemy przestrzennie jednorodne rozwiązanie opisane wzorami $\psi(\mathbf{x},t) = \psi_0 e^{-i\mu_0 t}$ i $n_R(\mathbf{x},t) = n_R^0$. Powyżej wartości granicznego pompowania $P > P_\mathrm{th} = \gamma_C\gamma_R/R$ powstaje stabilny kondensat z gęstością $|\psi_0|^2 = (P/\gamma_C) - (\gamma_R/R)$ i $\mu_0 = g_C|\psi_0|^2 + g_R n_R^0$. Definiujemy długość zasklepiania, która odpowiada wielkości rdzenia wiru, zadaną wzorem $\xi = 2\pi\hbar/\sqrt{mg_c|\psi_0|^2}$. Hipoteza skalowania ma sens tylko wtedy gdy odległość miedzy wirami jest znacznie większa niż ich rozmiar czyli warunek $L(t) \gg \xi$ musi być spełniony.

3.3 Wyniki

Aby zbadać proces porządkowania się fazy rozwiązujemy równanie (3.2) numerycznie na kwadratowej siatce o rozmiarze $l = 150\,\mu m$ z periodycznymi warunkami brzegowymi. Rozpoczynając z zerowych warunków początkowych $\psi, n_R = 0$, z szumu Wignerowskiego powstaje kondensat polarytonowy dla $P > P_{\mathrm{th}}$, któremu towarzyszy spontaniczne powstawanie wirów w procesie analogicznym do mechanizmu Kibble-Żurka. Dogłębny opis tego procesu zaprezentowano w [63, 80]. W tej pracy jednak nie interesuje nas proces tworzenia się defektów ale długo czasowa dynamika wzrostu domen, która przebiega gdy defekty już powstały. Wykażemy, że analogicznie jak w przypadku dwuwymiarowego modelu XY [78, 98, 103–106], najważniejszym procesem jest anihilacja par wir-antywir. Aby to zilustrować, na wykresie 3.1 zaprezentowano wykresy amplitudy i fazy funkcji falowej kondensatu w zadanej chwili czasu. Ilość par wir-antywir zmniejsza się monotonicznie. Na wykresie 3.2 zaprezentowano ewolucję gęstości kondensatu oraz ilości wirów w czasie. Ilość wirów jest szacowana na bazie ilości punktów na sieci numerycznej gdzie funkcja falowa osiąga wartość zero i następuje pełny obrót fazy wokół tego punktu, w danej chwili czasu. Na początku ewolucji ilość wirów jest bardzo duża, jako że zaczynamy ze stanu nieuporządkowanego z mała gęstością ale konkretne wiry stają dobrze określone tylko wtedy gdy gęstość jest duża. Przedstawiono wyniki dla dwóch zestawów parametrów, obrazujące dwie sytuacje, które mogą zajść w układzie. Na wykresie. 3.2(a), anihilacja par zaczyna występować w momencie, w którym kondensat nie ustabilizował się w pełni z powodu powolnego wysycania się gęstości. Oznacza to, że formowanie się defektów i porządkowanie fazy przez pewien okres występuje w tym samym czasie, przez co wyraźne odróżnienie tych procesów nie jest możliwe, podobnie jak w [100,106,113,114]. Z drugiej strony, jeżeli dobierzemy parametry systemu tak aby odpowiadały próbce o gorszej jakości, z krótszym czasem życia polarytonów, stan stacjonarny osiągany jest szybciej i dynamika dla $t \gtrsim 20\,\mathrm{ps}$ występuje praktycznie tylko wyłącznie dzięki porządkowaniu fazy, jak widać na wykresie 3.2(b). Parametry wykorzystywane w symulacjach są opisane w tabeli 3.1.



Rysunek 3.1: Porządkowanie fazy poprzez anihilację par wir-antywir. Gęstość (lewa kolumna) i faza (prawa kolumna) funkcji falowej kondensatu dla $t = 50\,\mathrm{ps}$ (góra) i $t = 150\,\mathrm{ps}$ (dół) po nagłym włączeniu zewnętrznego pompowania. Parametry $m^* = 5 \times 10^{-5} m_\mathrm{e}$, $\gamma_C^{-1} = 50\,\mathrm{ps}$, $\gamma_R^{-1} = 8\,\mathrm{ps}$, $A = 0$, $g_C = 3.4\,\mu\mathrm{eV}\mu\mathrm{m}^2$, $g_R = 7.2\,\mu\mathrm{eV}\mu\mathrm{m}^2$, $R = 5.5 \times 10^{-3}\,\mu\mathrm{m}^2\ \mathrm{ps}^{-1}$, $P = 40\,\mu\mathrm{m}^{-2}\ \mathrm{ps}^{-1}$, $\xi = 2.9\mu\mathrm{m}$.



Rysunek 3.2: Typowa ewolucja średniej gęstości kondensatu i ilości wirów. (a) Anihilacja par odbywa się równolegle do procesu wysycania się gęstości. (b) Ewolucja po czasie $t \gtrsim 20\,\mathrm{ps}$ odpowiada czystemu porządkowaniu się fazy. W tym przypadku gęstość defektów maleje zgodnie z prawem skalowania (3.4). Parametry dla przypadku (a) są takie same jak na wykresie 3.1, dla (b) używamy $\gamma_C^{-1} = 3.3\,\mathrm{ps}$, $\gamma_R^{-1} = 3\,\mathrm{ps}$, $A = 0.1$, $g_C = 3\,\mu\mathrm{eV}\mu\mathrm{m}^2$, $g_R = 6\,\mu\mathrm{eV}\mu\mathrm{m}^2$, $R = 2.3 \times 10^{-4}\,\mu\mathrm{m}^2\ \mathrm{ps}^{-1}$, $P = 3 \times 10^3\,\mu\mathrm{m}^{-2}\ \mathrm{ps}^{-1}$, $\xi = 1.6\mu\mathrm{m}$. Uśrednione po 16 realizacjach szumu wignerowskiego.

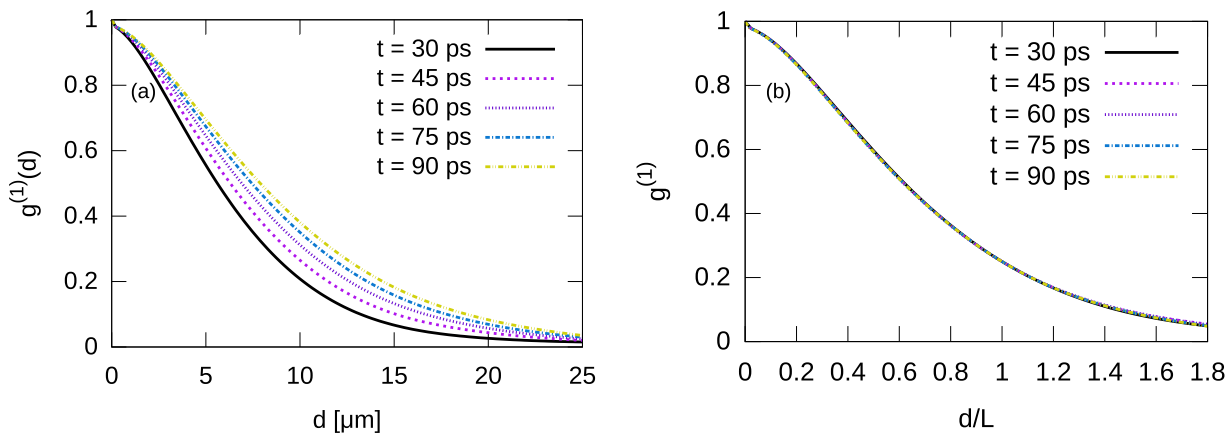
Wykresy	3.1, 3.2(a) oraz 3.4(a)	3.2(b), 3.3(a,b) i 3.4(b)
A	0	0.1
g_C	$3.4\mu eV\mu m^2$	$3\mu eV\mu m^2$
g_R	$7.2\mu eV\mu m^2$	$6\mu eV\mu m^2$
γ_C^{-1}	$50ps$	$3.3ps$
γ_R^{-1}	$8ps$	$3ps$
R	$5.5 \times 10^{-3}\mu m^2$	$2.3 \times 10^{-4}\mu m^2$
P	$40\mu m^{-2}ps^{-1}$	$3 \times 10^3\mu m^{-2}ps^{-1}$
ξ	$2.9\mu m$	$1.6\mu m$

Tablica 3.1: Dwa zestawy parametrów użyte w symulacjach w celu uzyskania wyników widocznych na wykresach.

Bardziej kompletną informację o statystycznych właściwościach systemu można uzyskać przy pomocy funkcji korelacji. Potwierdziliśmy hipotezę skalowania poprzez bezpośrednie sprawdzenie właściwości skalowania się funkcji korelacji pierwszego rzędu (3.1). Na wykresie 3.3(a) można zobaczyć $g^{(1)}(d)$ wykreśloną dla kilku czasów, podczas czystego porządkowania fazy, uśrednione po 16 realizacjach symulacji truncated Wigner. Jako oszacowanie skali długości $L(t)$ w (3.1) wybraliśmy wartość d dla której warunek $g^{(1)}(d) = 0.25$ jest spełniony. Warto zauważyć, że w przeciwieństwie do przypadku pól skalarnych, gdzie funkcja korelacji często posiada oscylujący ogon, w tym przypadku nie występują oscylacje, co jest charakterystyczne dla przypadku gdy ścianki domenowe są rozmyte [79, 104, 105]. Osiągnęliśmy idealny kolaps dla przeskalowanej funkcji korelacji $f(d/L(t))$, co potwierdza, że hipoteza skalowania jest słuszna dla tego przypadku, co widać na wykresie 3.3(b).

Weryfikacja hipotezy skalowania pozwala oczekiwać konkretnej formy prawa skalowania zależnej od czasu długości $L(t)$. Udało się ustalić, że dla przypadku „czystego” widocznego na wykresie 3.2(b) prawo skalowania jest podobne do prawa występującego dla przypadku dwuwymiarowego układu z wektorowym parametrem porządku gdzie $z \approx 2$, jak widać na wykresie 3.4(b).

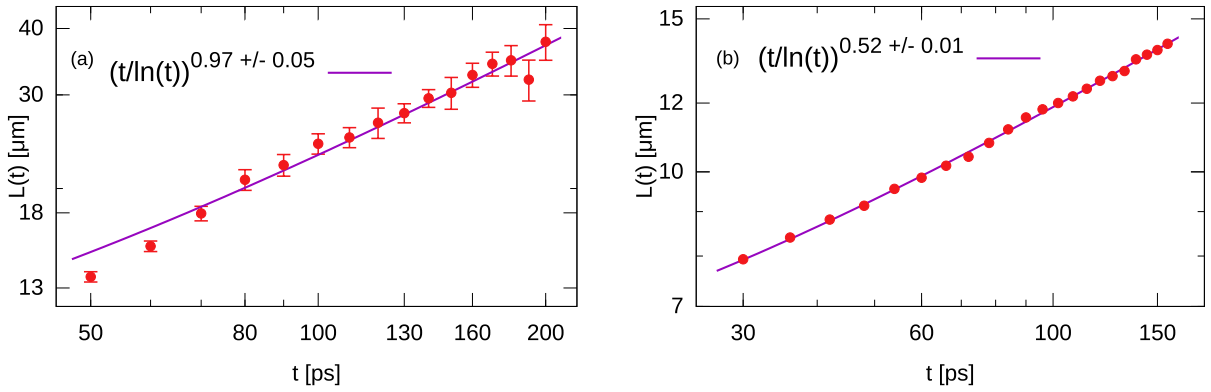
$$L(t) \sim \left(\frac{t}{\ln(t/t_0)}\right)^{1/z} \tag{3.4}$$



Rysunek 3.3: (a) Funkcja korelacji pierwszego rzędu od odległości, dla kilku czasów. Wzrost szerokości $g^{(1)}$ jest wynikiem wzrostu domen i charakterystycznej długości $L(t)$, którą definiujemy jaką wartość długości d dla której $g^{(1)} = 0.25$. (b) Kolaps funkcji korelacji po przeskalowaniu d przez $L(t)$, potwierdzający hipotezę skalowania. Parametry są takie same jak na wykresie 3.2(b).

W szczególności, prawo jest takie samo jak dla dwuwymiarowego modelu XY [98, 103–106]. Warto nadmienić, że poprawka logarytmiczna bierze się z obecności drugiej istotnej skali długości i nie istnieje w przypadku gdy warunki początkowe nie zawierają swobodnych wirów [104]. To prawo skalowania jest inne od przewidzianego dla zachowawczych kondensatów atomowych w przypadku bezspinowym [72] jak i spinorowym [79], gdzie uzyskano współczynnik $z \approx 1$. Pomimo tego, model kondensatu atomowego uwzględniający efekty strat [78] przewiduje współczynnik $z = 2$. Podkreśla to wyraźne różnice pomiędzy systemem zachowawczym a dysypatywnym z punktu widzenia wzrostu domen i demonstruje, że dla przypadku kondensatów polarytonowych straty są kluczowe.

Powyższe prawo skalowania z $z = 2$ może być wyjaśnione jako równowaga pomiędzy siłą przyciągania pomiędzy wirem i antywirem oraz efektywnym tarciem [78, 104, 107]. Rozważmy wyizolowany (anty)wir postaci $\psi = A(r,t)\mathbf{e}^{\pm i\phi(r,t) - i\mu_0 t}$. Kiedy dynamika jest dyfuzyjna [41, 115], daleko od rdzenia wiru $A \approx |\psi_0|$ i ewolucja fazy jest opisana równaniem Kardara-Parisi-Zhanga [95, 116]. W granicy $L(t) \to +\infty$ równanie to redukuje się do $\partial\phi/\partial t \approx -(1/\Gamma)\delta H/\delta\phi$, gdzie H jest nieliniowym Hamiltonianem modelu sigma odpowiadającym kinetycznej części równania (3.2). Energia wiru jest rozbieżna $E_v \sim \ln(l/a)$, gdzie l to rozmiar układu i $a \approx \xi$ jest „mikroskopowym” odcięciem [104, 117]. Dla pary wir-antywir, l zostaje zastąpione przez R czyli odległość między wirami. Z energii pary możemy uzyskać siłę przyciągającą $F = -dE/dR \sim 1/R$. Stratę energii dla wiru poruszającego się z prędkością v można wyliczyć



Rysunek 3.4: (a) Zależność czasowa skali długości $L(t)$ w przypadku pokazanym na wykresie 3.2(a). Dynamiczny wykładnik przyjmuje wartość $z \approx 1$, co jest zgodne z poprzednimi badaniami zachowawczych nadcieczy [72, 79]. (b) Przypadek występujący na wykresie 3.2(b) z czystym porządkowaniem fazy. W tym przypadku skala długości zachowuje się zgodnie z prawem skalowania dla układów wektorowych w dwóch wymiarach z niezachowanym parametrem porządku, równanie (3.4) gdzie $z \approx 2$. Słupki błędów odpowiadają odchyleniu standardowemu szacowania $L(t)$, wynikającemu z rozrzutu wartości $L(t)$ w zależności od realizacji ścieżki stochastycznej. Słupki błędów w przypadku (b) są porównywalnej wielkości co kropka na wykresie. Ilość uśrednionych realizacji wynosiła 30 dla (a) i 150 dla (b).

jako $dE/dt = \int d^2r(\delta H/\delta\phi)(\partial\phi/\partial t) \sim -\int d^2r(\partial\phi/\partial t)^2 = -v^2 \int d^2r(\partial\phi/\partial x)^2 \sim -v^2 E_v$, ze stałą tarcia $\gamma \sim E_v \sim \ln(R/a)$. Ewolucja średniej odległości między parami to $dR/dt \sim F/\gamma \sim 1/R\ln(R/a)$, co ostatecznie daje $R(t) \sim (t/\ln(t/t_0))^{1/2}$.

Przebadaliśmy szczegółowo przypadek drugiego zestawu parametrów obecnych na wykresie 3.2(a). Jak było wspomniane wcześniej, dla tych parametrów porządkowanie fazy nie jest czyste, ale odbywa się w trakcie gdy gęstość stanu stacjonarnego nie jest jeszcze w pełni ustalona. Pomimo tego, że hipoteza skalowania nie potrafi dokładnie opisać dynamiki tego systemu, można dokonać pewnego ilościowego opisu procesu porządkowania fazy. Istotnie, znajdujemy tylko delikatne odchylenie od kolapsu funkcji korelacji $g^{(1)}$, co jest wynikiem istnienia kolejnej skali czasowej, odpowiadającej powolnemu nasycaniu się gęstości a nie wzrostu domen. Na wykresie 3.4(a) widać ewolucję skali długości w czasie dla tego przypadku. Dane dobrze pasują do teoretycznych przewidywań (3.4) gdzie $z \approx 1$, w zgodzie z wynikami opisującymi wzrost domen powodowane wirami w ferromagnetycznych atomowych kondensatach w konfiguracji osi łatwej [79]. Wyniki te są zgodne z wartością $z = 1$ dla modelu E nadciekłego helu [101], i szacowaną wartością $z \approx 1.1$ dla zachowawczych kondesatów bezspinowych [72]. Warto nadmienić, że w tym reżimie stosunek średniej odległości pomiędzy wirami a rozmiarem wiru jest większa,

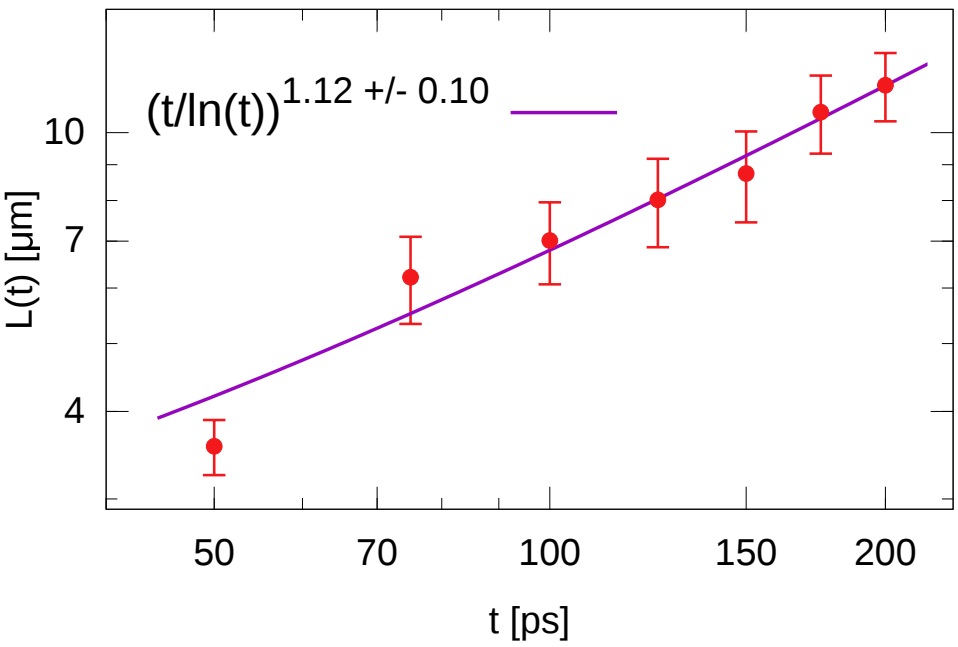
$L(t)/\xi = 17.2$ (dla $t = 150$ ps) w porównaniu do poprzedniego przypadku gdzie $L(t)/\xi = 4.5$ (dla $t = 90$ ps). Możliwe przejście pomiędzy tymi dwoma skalowaniami w funkcji tego parametru wymagałaby bardziej szczegółowej analizy numerycznej z dłuższym czasem ewolucji i większą siatką obliczeniową.

Warto zauważyć, że oddziaływanie pomiędzy wirem i antywirem może stać się odpychające dla dużych odległości [118], co może prowadzić do spowolnienia anihilacji i nasycenia skali długości $L(t)$ dla późniejszych czasów. Jednakże, nie zaobserwowaliśmy takiego zachowania dla rozważanych parametrów.

Podsumowując, potwierdziliśmy, że uniwersalne porządkowanie fazy może wystąpić w kondensacie polarytonów-ekscytonowych. Znaleźliśmy reżim skalowania odpowiadający czysto dyfuzyjnej dynamice, oraz taki który jest podobny do systemów zachowawczych. W drugim przypadku fizyczna interpretacja nie jest w pełni jasna. Warto nadmienić, że nie jest to jedyny układ, który wykazuje różne zachowanie uniwersalne w zależności od parametrów; w przypadku cieczy binarnych reżimy dyfuzyjny, lepkiej hydrodynamiki i inercyjnej hydrodynamiki współistnieją i charakteryzują się różnymi wartościami krytycznych wykładników [68, 102]. Według naszej najlepszej wiedzy, kondensaty polarytonowe są unikatowe w tym sensie, że przejście pomiędzy prawami skalowania jest zdeterminowane przez dynamikę defektów topologicznych.

3.4 Porządkowanie fazy dla warunków brzegowych Dirichleta

Na wykresie 3.5 pokazano ewolucję skali długości w przypadku z warunkami brzegowymi Dirichleta nałożonych na funkcję falową kondensatu $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{t})$. Uzyskane dopasowanie z dynamicznym wykładnikiem $1/z = 1.12 \pm 0.10$ zgadza się z otrzymanym w przypadku periodycznych warunków brzegowych, wykres 3.4(b) w rozdziale wyniki. Warto zauważyć, że słupki błędów są większe niż dla okresowych warunków brzegowych wyłącznie ze względu na sposób przeprowadzania uśredniania funkcji korelacji dla tego przypadku. Ponieważ wartość gęstości kondensatu zawsze zbiega do zera wraz ze zmniejszeniem odległości od brzegów, nie ma już możliwości uśredniania po współrzędnych przestrzennych tak jak w przypadku (3.1). Zamiast tego funkcja



Rysunek 3.5: Zależność skali długości od czasu $L(t)$ dla przypadku próbki o wysokiej jakości z wydłużonym czasem życia polarytonów, tak jak na wykresie 3.4(a), z warunkami brzegowymi Dirichleta (twardo ściennych).

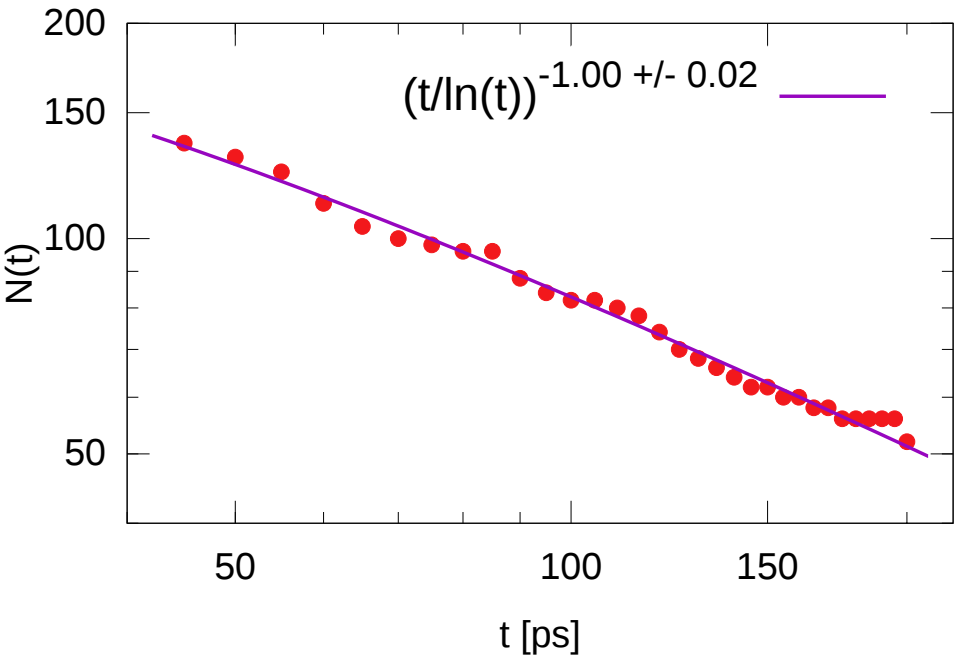
korelacji jest liczona od punktów x i $-x$ na próbce.

$$g^{(1)}(x,t) = \frac{1}{N}\langle\psi^*(-x,0,t)\psi(x,0,t)\rangle \tag{3.5}$$

Brak uśredniania po współrzędnych przestrzennych prowadzi do większej wariancji w szacowanej funkcji korelacji oraz skali długości $L(t)$.

3.5 Spadek ilości wirów

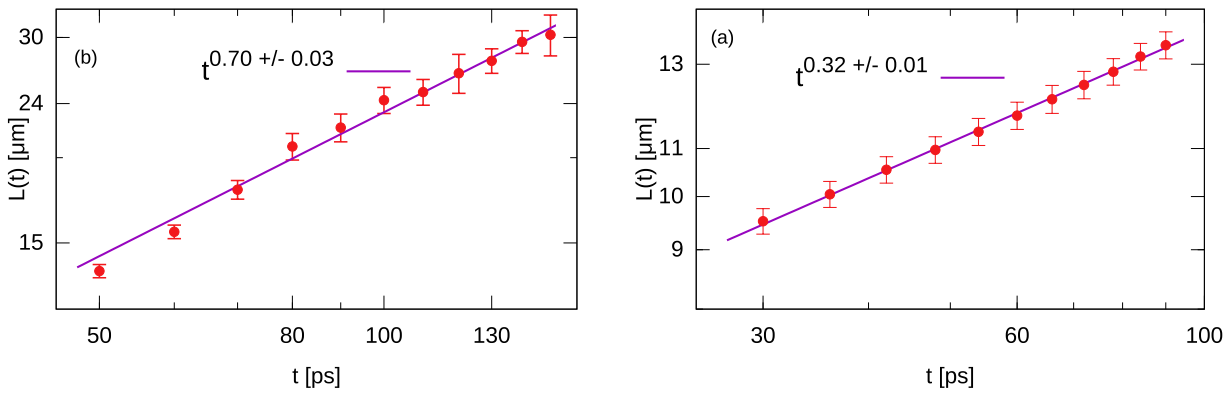
Użyto dwóch zautymatyzowanych metod zliczania wirów. Jedna z nich była oparta o zliczanie lokalnych minimów gęstości, druga oparta o detekcję rotacji fazy wokół konkretnego punktu na siatce obliczeniowej. Po zakończeniu początkowego etapu ewolucji, kiedy gęstość kondensatu jest relatywnie wysoka, wiry są dobrze zdefiniowane i obie metody dają takie same rezultaty. Zmiana ilości wirów została zaprezentowana na wykresie 3.6. Wyniki są w bardzo dobrej zgodności ze skalowaniem funkcji korelacji, biorąc pod uwagę fakt, że ilość wirów skaluje się jak $N \sim t^{-d/z}$ gdzie $d = 2$ jest ilością wymiarów a $z = 2$.



Rysunek 3.6: Zależność czasowa ilości wirów $N(t)$ pokazana w skali dwulogarytmicznej, dla przypadku próbki o niskiej jakości z krótkim czasem życia polarytonów (tak jak na wykresie 3.4(a) w rozdziale wyniki). Dane odpowiadają pojedynczej symulacji.

3.6 Efekt poprawki logarytmicznej

Na wykresie 3.7 zaprezentowano rezultaty dopasowania numerycznych wyników do czystych funkcji algebraicznych bez poprawki logarytmicznej. Dopasowanie jest również bardzo dobre ale wartość wykładników skalowania nie pokrywa się z przewidywaniami teoretycznymi, (3.4). Jest to przypadek podobny do opisanego w przypadku modelu XY [104], gdzie powyższy problem był gruntownie rozważany. Poprawka logarytmiczna efektywnie zmienia nachylenie dopasowania,



Rysunek 3.7: Dane identyczne jak na wykresie 3.4 ale bez wprowadzenia poprawki logarytmicznej.

ale nie powoduje widocznego odstępstwa od zależności liniowej w skali dwulogarytmicznej. Tego typu zakrzywienie można zaobserwować jedynie dla wczesnego czasu dla którego uniwersalne skalowanie nie jest poprawne.

Rozdział 4

Przejście typu Berezinskii–Kosterlitz–Thouless

4.1 Wstęp

Według twierdzenia Mermina-Wagnera nie może dojść do spontanicznego łamania ciągłej symetrii w układzie o dwóch lub mniejszej ilości wymiarów w temperaturze większej od zera. Wynika to z faktu, że dla dwóch wymiarów termiczne fluktuacje, które są wzbudzane bardzo małym kosztem energetycznym, niszczą uporządkowanie dalekiego zasięgu. Powoduje to, że w układzie dwuwymiarowym nie może wystąpić przejście fazowe z jednoczesnym łamaniem ciągłej symetrii. Istnienie topologicznych defektów, które mogą odgrywać rolę w tworzeniu pewnego rodzaju uporządkowania zostało zaproponowane przez Kosterlitza i Thoulessa i opisane na przykładzie dwuwymiarowego kryształu, modelu XY, neutralnie naładowanego płynu nadciekłego [119]. Zaproponowanemu przez nich powstaniu kwazi uporządkowania dalekiego zasięgu towarzyszy topologiczne przejście fazowe nazwane przejściem typu Berezinskii–Kosterlitz–Thouless, za odkrycie którego J. Michael Kosterlitz oraz David J. Thouless zostali nagrodzeni nagrodą nobla w 2016 roku. Dla modelu XY, topologicznymi defektami są wiry. Termiczne fluktuacje są zbyt słabe aby wzbudzić pojedynczy wir, gdyż energia samodzielnego wiru $E \sim ln\frac{L}{a}$, gdzie L to rozmiar układu i a to rozmiar rdzenia wiru. Jak widać dla dużych układów energia wzbudzenia jest zbyt duża, dlatego wiry powstają w parach wir-antywir gdzie antywir posiada przeciwną wirowość. Dla pewnej krytycznej temperatury T_{BKT} dochodzi do rozerwania się tych par i

przejścia z fazy uporządkowanej charakteryzującej się algebraicznym zanikiem funkcji korelacji do fazy nieuporządkowanej gdzie zanik funkcji korelacji jest wykładniczy. Przykładami doświadczalnymi w których zaobserwowano przejście BKT są szeregi złącz Josephsona oraz cienkie warstwy nadciekłego helu [120,121]. Polarytony eskcytonowe są nierównowagowym układem dwuwymiarowym o ciągłej symetrii, w którym znaczącą role odgrywają pompowanie i straty. Oznacza to, że są one ciekawym systemem, w którym może zaistnieć przejście BKT właśnie ze względu na ich nierównowagowy charakter. Istnienie topologicznych defektów jakimi są wiry kwantowe w kondensacie polarytonowym zaobserwowano doświadczalnie [15]. Udało się teoretycznie przewidzieć istnienie przejścia BKT dla reżimu OPO, w którym kondensat polarytonowy wzbudzany jest laserem o odpowiednio dobranej częstotliwości, który rozprasza utworzone polarytony do stanu podstawowego oraz silnie wzbudzonego [96].Zaobserwowano algebraiczny zanik funkcji korelacji dla próbki o wysokiej jakości pompowanej nierezonansowo [97] jednak opis teoretyczny nie uwzględniał istnienia rezerwuaru. Celem naszych poszukiwań było znalezienie przejścia BKT w otwarto-dysypatywnym modelu polarytonowym, w którym oprócz równania opisującego kondensat uwzględnione jest równanie na ewolucję rezerwuaru. Jest to praca zainspirowana wynikami [96, 97].

4.2 Opis przejścia BKT w modelu XY

Kluczową rolę w przejściu BKT odgrywają wiry. Wir jest to defekt topologiczny, którego nie da się przekształcić do stanu podstawowego, w którym faza jest taka sama w każdym miejscu, poprzez ciągły obrót fazy. Najbardziej podstawowym modelem do omawiania natury przejścia BKT jest model XY, który opisujemy Hamiltonianem:

$$H = -J \sum_{<i,j>} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j = -J \sum_{<i,j>} cos\left(\theta_i - \theta_j\right) \tag{4.1}$$

Gdzie $< i, j >$ oznacza sumowanie po wszystkich najbliższych sąsiadach na siatce a θ_i oznacza kąt i-tego rotoru względem dowolnie dobranej osi. J jest stałą oddziaływań między sąsiadami.

Hamiltonian ten w przybliżeniu ciągłym, dla niskich temperatur przybiera postać:

$$H = E_0 + \frac{J}{2}\int dr\,(\nabla\theta)^2 \tag{4.2}$$

gdzie $E_0 = 2JN$ jest energią stanu podstawowego w którym wszystkie N rotorów jest ustawionych w tym samym kierunku.

Wir jest to defekt wokół którego faza zmienia się o wielokrotność 2π. Korzystając z tej własności otrzymujemy definicję wirowości:

$$\oint_C \nabla\theta(\mathbf{r})d\mathbf{l} = 2\pi n \tag{4.3}$$

Całkując w tym samym kierunku ale uzyskując wynik gdzie $n = -1, -2, ...$ dostajemy wir o przeciwnym ładunku punktowym, który nazywamy antywirem. Interesuje nas energia wiru, którą można wyznaczyć korzystając z wyprowadzania $\nabla\theta$ z warunku wirowości, przy założeniu symetrii kołowej wiru

$$2\pi n = \oint_C \nabla\theta(\mathbf{r})d\mathbf{l} = 2\pi r|\nabla\theta| \tag{4.4}$$

Wstawiając ten wynik do Hamiltonianu uzyskujemy:

$$E_{vor} - E_0 = \frac{J}{2}\int dr\,(\nabla\theta)^2 = \frac{Jn^2}{2}\int_0^{2\pi}\int_a^L rdr\frac{1}{r^2} = J\pi n^2 ln\left(\frac{L}{a}\right) \tag{4.5}$$

gdzie L jest rozmiarem układu, a a jest krótko dystansowym odcięciem układu, które można uznać za rozmiar rdzenia wiru. Zależność energii wiru od wielkości układu jest logarytmiczna i przez to potrafi być duża dla dużych układów, co powoduje, że pojedynczy wir nie może zostać wzbudzony przez termiczne fluktuacje. Sugeruje to, że wiry mogą być zaniedbane, co jednak nie jest prawdą. Rozważmy teraz parę wir-antywir, jeżeli dobierzemy krzywą zamkniętą odpowiednio tak aby zamykała ona cała parę uzyskamy efekt znoszenia się wirowości $\oint_C \nabla\theta(\mathbf{r})d\mathbf{l} = 0$. Energia takiej pary wynosi [122]

$$E_{VorPairs} - E_0 = 2J\pi n^2 ln\left(\frac{R}{a}\right) \tag{4.6}$$

gdzie R to odległość miedzy wirami w parze. Jak widać energia pary zależy logarytmiczne od odległości pomiędzy jej składnikami i nawet dla niskich temperatur termiczne fluktuacje są

wstanie wzbudzić takie pary.

Wykorzystując wzór na energię swobodną Helmholtza, który jest różnicą między energią układu a entropią pomnożoną przez temperaturę $F = E - TS$, możemy oszacować wartość temperatury dla której następuje przejście BKT w modelu XY. Entropia układu to logarytm z ilości możliwych obsadzeń wirów na dwuwymiarowej przestrzeni $S = k_B ln(L^2/a^2)$. Energię układu uzyskujemy ze wzoru (4.5). Energia swobodna przybiera postać:

$$F = E_0 + (\pi J - 2k_B T)\, ln\left(\frac{L}{a}\right) \tag{4.7}$$

Dla temperatury $T < \frac{\pi J}{2k_B}$ energia swobodna będzie zmierzać do ∞ wraz ze wzrostem rozmiaru układu $L \to \infty$. Dla temperatur $T > \frac{\pi J}{2k_B}$ układ może obniżyć swoją energię swobodną produkując wiry. To logarytmiczna zależność energii dwuwymiarowych wirów pozwala na jakościową zmianę stanu układu na skutek współzawodnictwa pomiędzy energią a entropią dla pewnej krytycznej temperatury T_{BKT}. W rzeczywistości to nie pojedyncze wiry o tym samym znaku pojawiają się dla temperatur powyżej $T > T_{BKT}$ a pary wirów, która są związane dla temperatury poniżej $T < T_{BKT}$ ulegają separacji w temperaturze T_{BKT}. Jest to efekt kolektywny, podczas którego wszystkie pary rozwiązują się. Pary wirów tworzące się wraz ze wzrostem temperatury zniekształcają fazę do tego stopnia, że człon $2J\pi n^2$ w energii pary (4.6) zbiega do zera dla dużego rozdzielenia pary. Rozważając funkcje korelacji spinów dla niskich temperatur, nie uwzględniamy obecności wirów a tylko fale spinów [119]. Uzyskujemy dzięki temu algebraiczny zanik, sugerujący kwazi uporządkowanie dalekiego zasięgu.

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r})\mathbf{S}(\mathbf{0})\rangle = \left(\frac{r}{L}\right)^{-\eta} \tag{4.8}$$

gdzie wykładnik η jest zależny od temperatury zgodnie z relacją $\eta = \frac{T}{2\pi J}$. Uwzględnienie wirów dla temperatur powyżej $T > T_{BKT}$ gdzie dochodzi do rozerwania par i wiry mogą poruszać się swobodnie generując niezerową wirowość zanik przybiera postać wykładniczą [119].

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r})\mathbf{S}(\mathbf{0})\rangle = e^{-r/\xi} \tag{4.9}$$

gdzie ξ to długość korelacji, która przybiera wartość $\xi = \frac{L}{ln(2T/J)}$, także zależną od temperatury.

4.3 Model

Rozważany model opisuje ewolucję funkcji falowej nierezonansowo pompowanego kondensatu polarytonowego $\psi(\mathbf{x},t)$ sprzężonego z rezerwuarem opisanym przez pole gęstości $n_R(\mathbf{x},t)$ [41, 109, 110].

$$\begin{aligned} i\mathrm{d}\psi &= \left[-\frac{\hbar}{2m^*}\nabla^2 + \frac{g_C}{\hbar}|\psi|^2 + \frac{g_R}{\hbar}n_R + \frac{i}{2}\left(Rn_R - \gamma_C\right)\right]\psi\mathrm{d}t + \mathrm{d}W \\ \frac{\partial n_R}{\partial t} &= P - \left(\gamma_R + R|\psi|^2\right)n_R \end{aligned} \tag{4.10}$$

W powyższym równaniu P jest mocą pompowania cząstek w rezerwuarze, m^* to masa efektywna dolnych polarytonów, γ_C i γ_R to odpowiednio współczynniki strat kondensatu i rezerwuaru. R to współczynnik stymulowanego rozpraszania z rezerwuaru do kondensatu a g_C i g_R to współczynniki oddziaływań, odpowiednio między polarytonami i między kondensatem a rezerwuarem. Wykorzystując przybliżenie truncated Wigner [110] uzyskujemy zespolony stochastyczny szum $\mathrm{d}W$, odpowiadający zaburzeniom wynikającym z wchodzenia i wychodzenia cząstek z kondensatu.

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{d}W(\mathbf{x})\mathrm{d}W^*(\mathbf{x}')\rangle &= \frac{\mathrm{d}t}{2(\Delta x)^2}(Rn_R + \gamma_C)\delta_{\mathbf{x},\mathbf{x}'}, \\ \langle \mathrm{d}W(\mathbf{x})\mathrm{d}W(\mathbf{x}')\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Aby można było określić czy doszło do przejścia BKT należy najpierw zdefiniować przestrzenną funkcję korelacji pierwszego rzędu dla danej chwili:

$$g^{(1)}(\mathbf{d}) = \frac{1}{N}\int \langle \psi^*(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r}+\mathbf{d},t)\rangle \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{4.12}$$

gdzie $d = |\mathbf{d}|$ i $f(0) = 1$, oraz $N = \langle \int |\psi|^2 \mathrm{d}\mathbf{r}\rangle$. Jeżeli można dopasować funkcję korelacji do algebraicznego zaniku (4.13) możemy powiedzieć, że znajdujemy się w fazie kwazi uporządkowania dalekiego zasięgu w której wiry wiążą się w pary, w przeciwnym wypadku gdy dopasowanie przypomina zanik wykładniczy (4.14) znajdujemy się w fazie nie uporządkowanej w której wiry

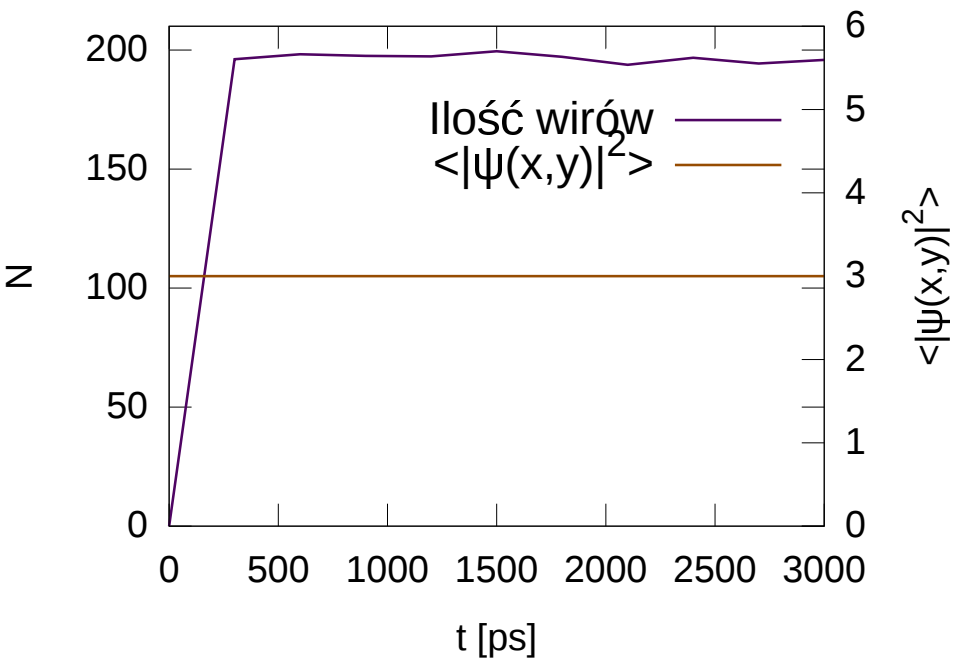
istnieją samodzielnie.

$$g^{(1)}(\mathbf{d}) \sim \mathbf{d}^{-\alpha} \tag{4.13}$$

$$g^{(1)}(\mathbf{d}) \sim exp(-\mathbf{d}/\beta) \tag{4.14}$$

4.4 Wyniki

Symulacje zostały przeprowadzone przy pomocy oprogramowania XMDS2 [123]. Równanie (4.10) w wersji bezwymiarowej dla którego $\hbar, m^* = 1$ było rozwiązywane na siatce $256x256$ z periodycznymi warunkami brzegowymi. W celu szybszego ustabilizowania się symulacji jako warunek początkowy użyto rozwiązania stacjonarnego jednorodnie pompowanego kondensatu polarytonowego $|\psi(\mathbf{r})_\mathbf{0}|^\mathbf{2} = (\mathbf{P}/\gamma_\mathbf{C}) - (\gamma_\mathbf{R}/\mathbf{R})$ oraz stacjonarnej gęstości rezerwuaru $n_R^0 = \gamma/R$. Symulacja była przeprowadzana wystarczająco długo aby doszło do ustabilizowania się gęstości kondensatu oraz ilości wirów. Na wykresie 4.1 pokazano jak dochodzi do nasycenia się średniej ilości wirów oraz średniej gęstości $|\psi(\mathbf{r})|^\mathbf{2}$ z czasem trwania symulacji. Do uśrednienia wyników wykonano 30 oddzielnych symulacji.



Rysunek 4.1: Wykres pokazujący średnią ilość wirów oraz średnią $|\psi(\mathbf{r})|^\mathbf{2}$ dla danej chwili czasu. Rozpoczynając z warunku początkowego $|\psi(\mathbf{r})_\mathbf{0}|^\mathbf{2} = (\mathbf{P}/\gamma_\mathbf{C}) - (\gamma_\mathbf{R}/\mathbf{R})$ widać, że gęstość ustala się już na samym początku, średnia ilość wirów stabilizuje się już przy $300ps$. Symulacja trwa aż do $3ns$. Przykład dla mocy pomopowania $P/P_{th} = 4$.

Przybliżenie truncated Wigner zostało nazwane w taki sposób ze względu na pominięcie wyższych pochodnych rozwinięcia równania Master [110]. Nakłada to warunek na rozmiar komórki sieci numerycznej dV tak aby to przybliżenie miało sens. Aby rozwiązać stochastyczne

równanie (4.10) należy dobrać siatkę tak aby spełniała poniższe warunki.

$$\frac{A_{kin}}{\hbar\gamma_R} > 1, \quad \frac{A_{kin}}{g_C|\psi(\mathbf{r})|^{\mathbf{2}}} > 1 \quad \text{i} \quad \frac{g_C}{2\hbar\gamma_C dV} < 1 \tag{4.15}$$

gdzie $A_{kin} = \frac{\hbar^2}{2m^* dV}$. Można te warunki przepisać do postaci:

$$\frac{\hbar}{2m^*\gamma_R} > dV, \quad \frac{\hbar^2}{2m^* g_C|\psi(\mathbf{r})|^{\mathbf{2}}} > dV \quad \text{i} \quad \frac{g_C}{2\hbar\gamma_C} < dV \tag{4.16}$$

Ustalamy dwie wielkości:

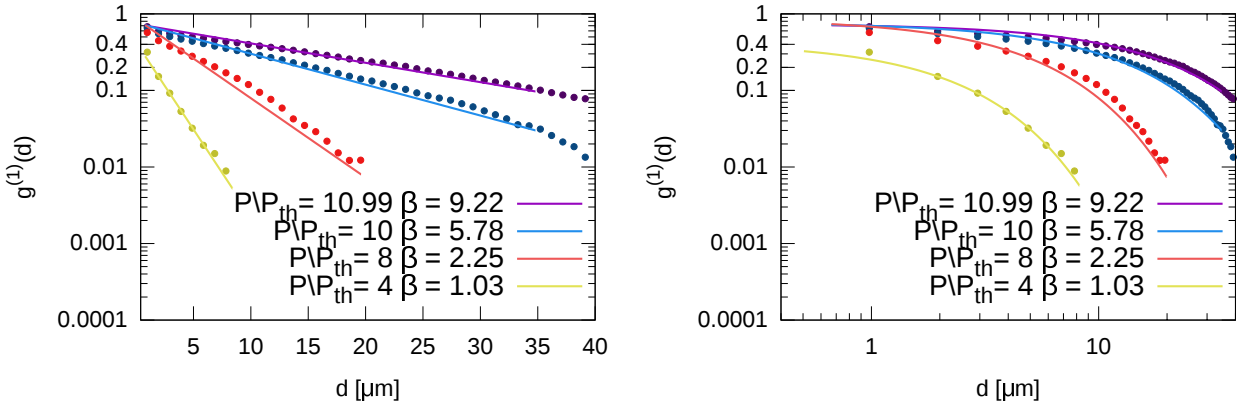
$$\xi_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2m^* g_C|\psi(\mathbf{r})|^{\mathbf{2}}}} \quad \text{oraz} \quad l = \sqrt{\frac{\hbar}{2m^*\gamma_R}} \tag{4.17}$$

z czego uzyskujemy warunek na rozmiar oczka siatki numerycznej dx, dy:

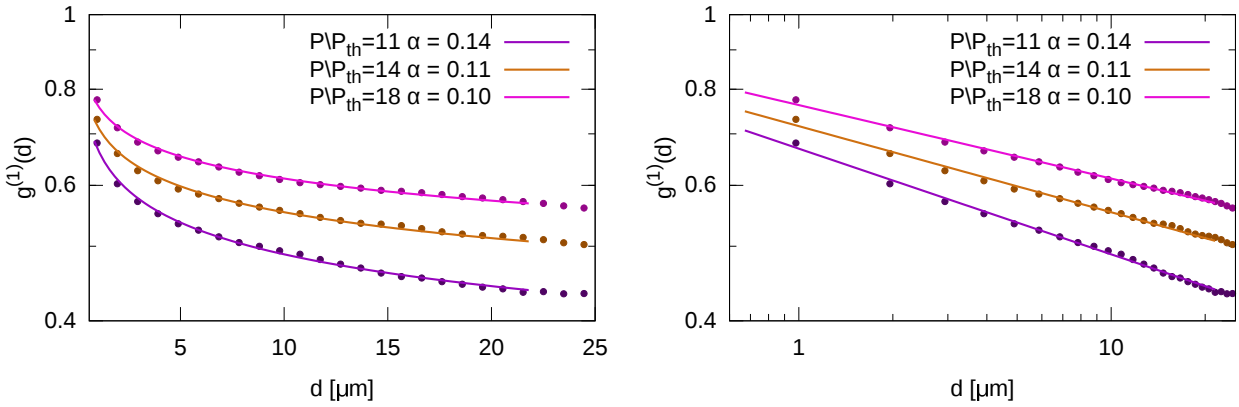
$$min[l, \xi_0] > \sqrt{dV} = dx = dy > \sqrt{\frac{g_C}{2\hbar\gamma_C}} \tag{4.18}$$

Pierwszą serię symulacji przeprowadzono dla parametrów $g_C = 0.76\mu eV\mu m^2, g_R = 1.52\mu eV\mu m^2$, $\gamma_C^{-1} = 3ps$, $\gamma_R^{-1} = 3ps$, $R = 1.16\mu m^2$, $P_{th} = 0.1\mu m^{-2}ps^{-1}$, $\tau = 3ps$, $\xi = 1.86\mu m$. Ewolucja równania (4.10) trwała $3ns$. Zgodnie z warunkami (4.18) dla tych parametrów krok przestrzenny powinien znajdować się w przedziale $1.8636 \cdot 10^{-6}m > dx > 1.0411 \cdot 10^{17}m$, co jest sprzecznością powodująca niefizyczność wybranych parametrów. Niemniej w celu zbadania własności modelu symulacje zostały przeprowadzone dla siedmiu różnych mocy pompowania $P/P_{th} = 4, 8, 10, 10.99, 11, 14, 18$. Zwiększanie mocy pompowania ma podobny efekt jak obniżanie temperatury układu w równowadze termodynamicznej. Na wykresach 4.2 widać, że dla mocy poniżej $P/P_{th} = 11$ spadek funkcji korelacji jest wykładniczy, szczególnie na wykresie po lewej stronie dla którego na osi y skala jest logarytmiczna, a dopasowanie w tej skali jest wyraźnie liniowe. Dla mocy pompowania $P/P_{th} = 11$ i wyższej wyraźnie widać algebraiczny zanik funkcji korelacji widoczny jako liniowy spadek na prawym wykresie 4.3. Dla mocy $P/P_{th} = 11$ mamy wyraźne przejście z zaniku wykładniczego do algebraicznego i wiązanie się par wirów. Przykład stanu układu w przypadku związanych par dla mocy pompowania powyżej przejścia BKT widać na wykresie 4.4. Faza nie jest zbytnio zaburzona co jest dodatkowym czynnikiem

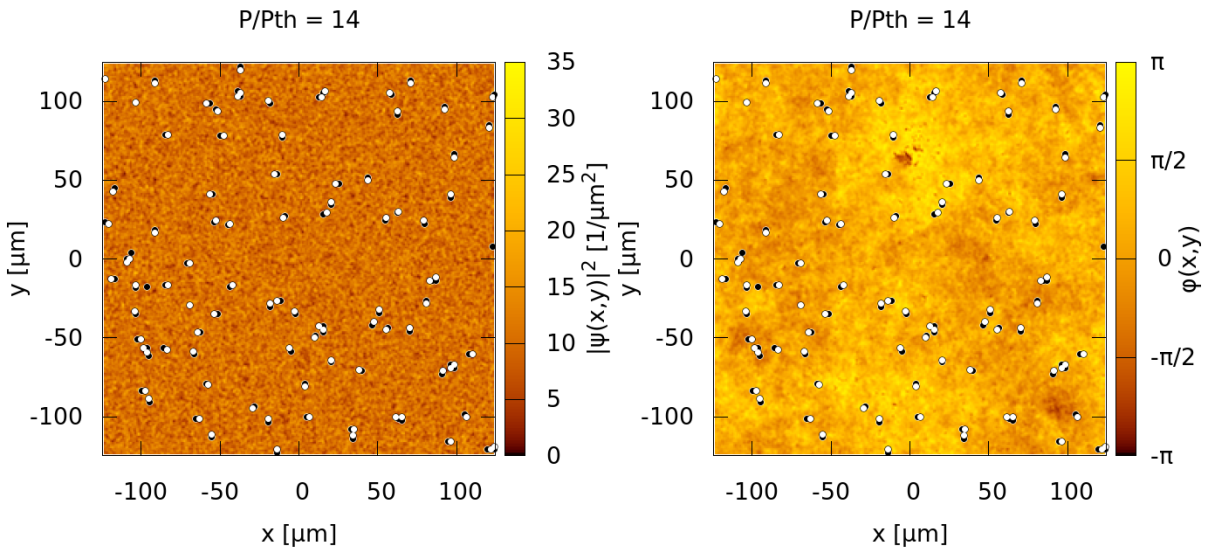
potwierdzającym fakt, że jesteśmy w zakresie algebraicznego zaniku. Na wykresie 4.5 pokazano gęstość i fazę dla mocy pompowania poniżej przejścia BKT. Widać dużą liczbę wirów oraz silne zaburzenie fazy odpowiadające wykładniczemu zanikowi.



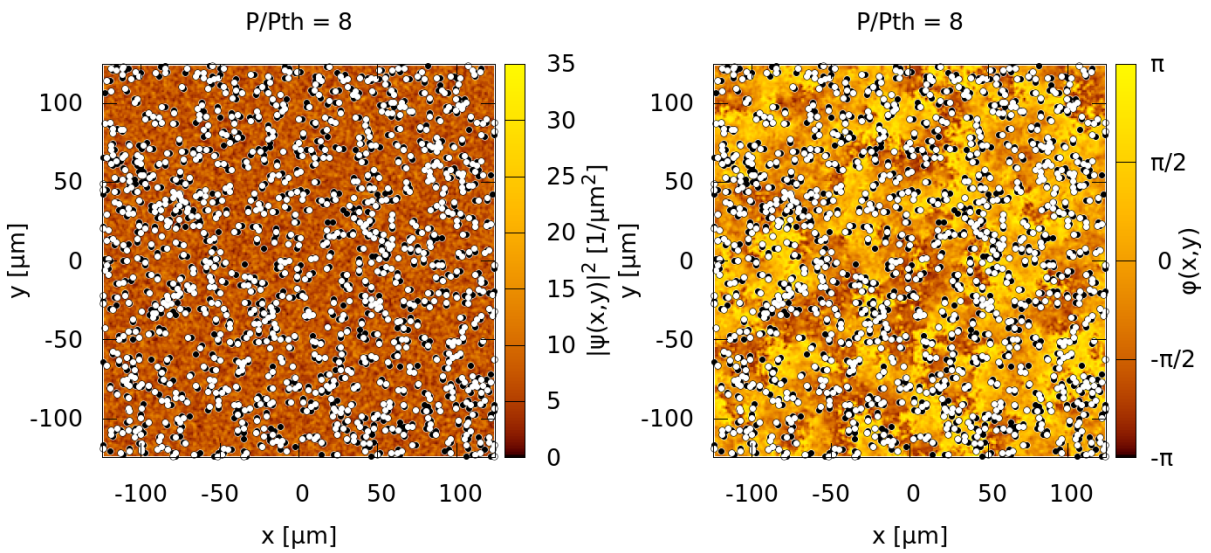
Rysunek 4.2: Funkcja korelacji pierwszego rzędu i dopasowanie wykładnicze dla mocy pompowania $P/P_{th} = 4, 8, 10, 10.99$. Układ jest poniżej przejścia BKT nawet dla mocy 10.99. Po lewej w skali logarytmicznej, po prawej w skali dwulogarytmicznej.



Rysunek 4.3: Funkcja korelacji pierwszego rzędu i dopasowanie algebraiczne dla mocy pompowania $P/P_{th} = 11, 14, 18$. Widać, że jesteśmy jeszcze powyżej przejścia BKT a dla $P/P_{th} = 11$ jest wyraźne przejście do fazy z kwazi uporządkowaniem dalekiego zasięgu. Po lewej w skali logarytmicznej, po prawej w skali dwulogarytmicznej.

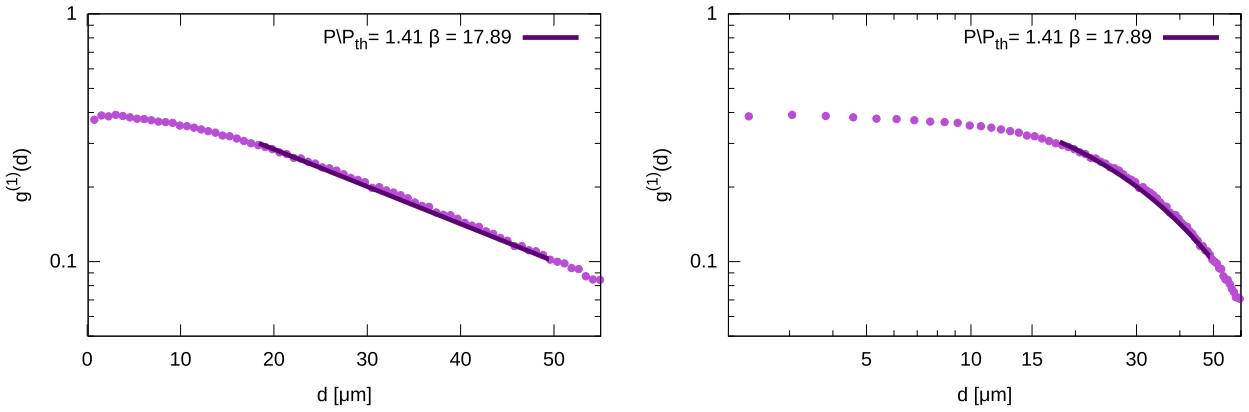


Rysunek 4.4: Gęstość i faza z nałożonymi wirami (czarny kolor) i antywirami (biały kolor) dla mocy pompowania $P/P_{th} = 14$, powyżej przejścia BKT. Niewielka ilość wirów w większości sparowanych i bardzo małe zaburzenie fazy odpowiada algebraicznemu zanikowi funkcji korelacji rys. 4.3.

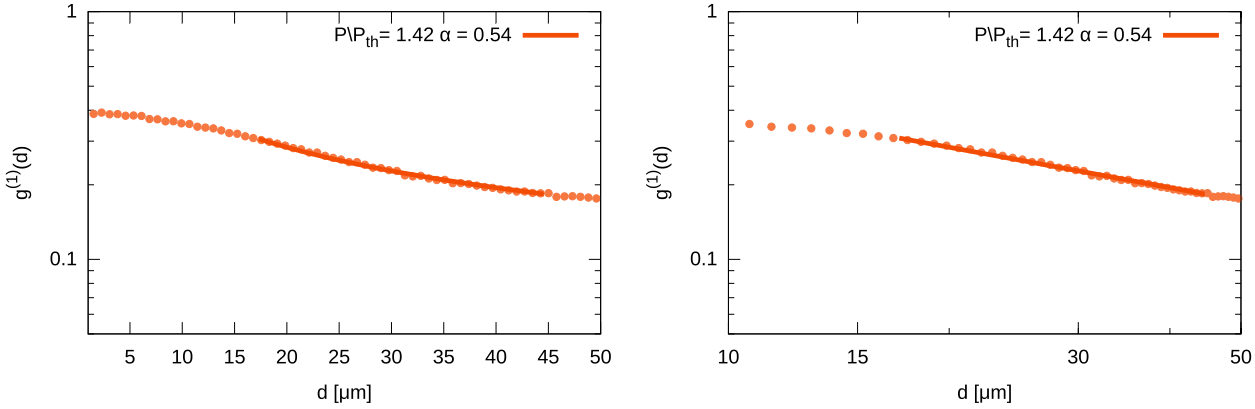


Rysunek 4.5: Gęstość i faza z nałożonymi wirami (czarny kolor) i antywirami (biały kolor) dla mocy pompowania $P/P_{th} = 8$, która znajduje się poniżej przejścia BKT. Duża ilość niesparowanych wirów i mocne zaburzenie odpowiada wykładniczemu zanikowi korelacji rys. 4.2.

Kolejne symulacje numeryczne zostały przeprowadzone dla parametrów $g_C = 6{\cdot}10^{-3}\mu eV\mu m^2$, $g_R = 12\cdot 10^{-3}\mu eV\mu m^2$, $\gamma_C^{-1} = 3ps$, $\gamma_R^{-1} = 2ps$, $R = 0.01\mu m^2$, $P_{th} = 7.2\cdot 10^{-3}\mu m^{-2}ps^{-1}$, $\tau = 2ps$, $\xi = 1.52\mu m$, które są zbliżone do parametrów eksperymentu przeprowadzonego przez grupy profesora Yamamoto [88].Ewolucja równania (4.10) trwała $80ns$. Tak długi czas symulacji, szczególnie w porównaniu do poprzedniego zestawu parametrów był potrzebny aby doszło do pełnej stabilizacji gęstości oraz ilości wirów. Zgodnie z warunkami (4.18) krok przestrzenny powinien znajdować się w przedziale $1.52163\mu m \gtrsim dx > 0.116933\mu m$, dlatego $dx = 1.52163\mu m$. Symulacje wykonano na siatce $N_x \times N_y = 256 \times 256$ a obszar symulowany miał wymiary $194.76864\mu m \times 194.76864\mu m$. Wykonano 30 uśrednień stochastycznych dla każdej mocy.



Rysunek 4.6: Funkcja korelacji pierwszego rzędu i dopasowanie wykładnicze dla mocy pompowania $P/P_{th} = 1.41$. Układ jest poniżej przejścia BKT. Po lewej w skali logarytmicznej, po prawej w skali dwulogarytmicznej.



Rysunek 4.7: Funkcja korelacji pierwszego rzędu i dopasowanie algebraiczne dla mocy pompowania $P/P_{th} = 1.42$. Układ jest powyżej przejścia BKT. Po lewej w skali logarytmicznej, po prawej w skali dwulogarytmicznej.

Na wykresach 4.6 widać, że dla mocy $P/P_{th} = 1.41$ spadek funkcji korelacji jest wykładniczy, liniowe doposowanie wyraźnie widoczne na lewym wykresie którego na osi y skala jest logarytmiczna. Prawy wykres jest w skali dwulogarytmicznej w celu porównania z wykresami 4.7 o mocy $P/P_{th} = 1.42$. Dla tej mocy pompowania i wyższych aż do $P/P_{th} = 1.58$ zanik funkcji korelacji jest algebraiczny co widać jako zależność liniową na prawym wykresie. Na lewym wykresie w skali jednologarytmicznej także widać dobre dopasowanie pomimo tego, że zakrzywienie nie jest tak wyraźne jak dla prawego wykresu 4.6. Widzimy, że pomiędzy mocą $P/P_{th} = 1.41$ a $P/P_{th} = 1.42$ dochodzi do przejścia z zaniku wykładniczego do zaniku algebraicznego i wiązanie się par wirów.

W pracy wykonanej pod kierunkiem profesor Szymańskiej [96], w której bazowano na modelu z dwoma równaniami opisującymi kondensat generowany metodą OPO, znaleziono obszar fazy BKT dla bardzo wąskiego zakresu mocy pompowania, który leżał blisko granicy pompowania P_{th}. Nasze symulacje pokazują, że obszar fazy BKT jest znacznie szerszy i znajduje się wyraźnie ponad P_{th}. Druga praca [97], która skupia się na doświadczalnym potwierdzeniu przejścia BKT zawiera także analizę teoretyczną przeprowadzoną przez grupę profesor Szymańskiej. Użyto w tej pracy modelu opisującego nierezonansowe wzbudzenie kondensatu, ale bez dodatkowego równania opisującego ewolucje rezerwuaru. Pomimo braku uwzględnia rezerwuaru w symulacjach ich obliczenia numeryczne dobrze pokrywały się z wynikami doświadczalnymi dzięki długim czasom życia polarytonów w użytej próbce.

Rozdział 5

Podsumowanie

W ramach pracy doktorskiej przeprowadzono teoretyczne badania kondensatu polarytonów ekscytonowych w oparciu o otwarto dysypatywne równanie Grossa-Pitajewskiego sprzężone z równaniem na ewolucję rezerwuaru.

W drugim rozdziale omówiono rozwiązanie typu Sink, które jest stanem stacjonarnym charakterystycznym dla układów nierównowagowych. Pokazano teoretycznie ich istnienie oraz mechanizm powstawania w kondensacie polarytonowym. Została wyznaczona domena istnienia tego rozwiązania. Znaleziono przedział wartości potencjału chemicznego μ w zależności od mocy pompowania P dla, którego może istnieć rozwiązanie typu Sink. Zbadano także właściwości tych stanów. Następnie opisano numeryczną metodę ich znajdowania. Wyznaczono analitycznie rozwiązania, które z pewnym przybliżeniem, w zależności od parametrów, jest podobne do rozwiązania typu Sink. Przebadano przypadek dwuwymiarowy w celu znalezienia dwuwymiarowego odpowiednika Sinku i oceniono, że z powodu występowania wirów, rozwiązania te w tym przypadku nie powstają.

W następnym rozdziale opisano badania na kinetyką porządkowania się fazy. Wykorzystując stochastyczne równanie Grossa-Pitajewskiego przeprowadzono szereg symulacji, które posłużyły do wyznaczenia uśrednionej funkcji korelacji pierwszego rzędu. Symulacje przeprowadzono dla dwóch zestawów parametrów. Dla obu zestawu parametrów uzyskano kolaps funkcji korelacji co pozwalało na wyznaczenie długości korelacji. Udało się potwierdzić dla obu zestawów parametrów, hipotezę skalowania. Znaleziono reżim skalowania odpowiadający czysto dyfuzyjnej dynamice, oraz taki który jest podobny do systemów zachowawczych.

W ostatnim rozdziale opisano mechanizm przejścia typu Berezinskii–Kosterlitz–Thouless. Odtworzono jego charakterystyki czyli tworzenie się lub rozpadanie par wir-antywir i związaną z tym zmianę szybkości zaniku funkcji korelacji. Opisano fizyczny mechanizm przejścia BKT w oparciu o model XY. Przeprowadzono szereg symulacji uwzględniając warunki wynikające z przybliżenia truncated Wigner. Zaprezenowano dwa zestawy wyników przeprowadzonych symulacji, które pokazują istnienie przejścia BKT w modelu otwarto-dysypatywnym z rezerwuarem.

Bibliografia

[1] C. Weisbuch, M. Nishioka, A. Ishikawa, and Y. Arakawa. Observation of the coupled exciton-photon mode splitting in a semiconductor quantum microcavity. *Phys. Rev. Lett.*, 69:3314–3317, Dec 1992.

[2] J. J. Hopfield. *Aspects of Polaritons*, pages 771–782. Springer US, Boston, MA, 1995.

[3] C. J. Pethick and H. Smith. *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2 edition, 2008.

[4] J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, J. M. J. Keeling, F. M. Marchetti, M. H. Szymanska, R. Andre, J. L. Staehli, V. Savona, P. B. Littlewood, B. Deveaud, and Le Si Dang. Bose-einstein condensation of exciton polaritons. *Nature*, 443(7110):409–414, Sep 2006.

[5] Alexey Kavokin, Jeremy J Baumberg, Guillaume Malpuech, and Fabrice P Laussy. Microcavities, 2011.

[6] Lev Pitaevskii and Sandro Stringari. *Bose-Einstein condensation and superfluidity*, volume 164. Oxford University Press, 2016.

[7] N Bogoliubov. On the theory of superfluidity. *J. Phys*, 11(1):23, 1947.

[8] Daniele Sanvitto and Vladislav Timofeev. *Exciton Polaritons in Microcavities: New Frontiers*, volume 172. Springer Science & Business Media, 2012.

[9] J. J. Hopfield. Theory of the contribution of excitons to the complex dielectric constant of crystals. *Phys. Rev.*, 112:1555–1567, Dec 1958.

[10] C. Weisbuch, M. Nishioka, A. Ishikawa, and Y. Arakawa. Observation of the coupled exciton-photon mode splitting in a semiconductor quantum microcavity. *Phys. Rev. Lett.*, 69:3314–3317, Dec 1992.

[11] S. Christopoulos, G. Baldassarri Höger von Högersthal, A. J. D. Grundy, P. G. Lagoudakis, A. V. Kavokin, J. J. Baumberg, G. Christmann, R. Butté, E. Feltin, J.-F. Carlin, and N. Grandjean. Room-temperature polariton lasing in semiconductor microcavities. *Phys. Rev. Lett.*, 98:126405, Mar 2007.

[12] Kena-Cohen S. and Forrest S. R. Room-temperature polariton lasing in an organic single-crystal microcavity. *Nat Photon*, 4(6):371–375, Jun 2010.

[13] Johannes D. Plumhof, Thilo Stöferle, Lijian Mai, Ullrich Scherf, and Rainer F. Mahrt. Room-temperature bose–einstein condensation of cavity exciton–polaritons in a polymer. *Nat Mater*, 13(3):247–252, 2014.

[14] Alberto Amo, Jerome Lefrere, Simon Pigeon, Claire Adrados, Cristiano Ciuti, Iacopo Carusotto, Romuald Houdre, Elisabeth Giacobino, and Alberto Bramati. Superfluidity of polaritons in semiconductor microcavities. *Nat Phys*, 5(11):805–810, 2009.

[15] K. G. Lagoudakis, M. Wouters, M. Richard, A. Baas, I. Carusotto, R. Andre, Le Si Dang, and B. Deveaud-Pledran. Quantized vortices in an exciton-polariton condensate. *Nat Phys*, 4(9):706–710, Sep 2008.

[16] Georgios Roumpos, Michael Lohse, Wolfgang H. Nitsche, Jonathan Keeling, Marzena Hanna Szymańska, Peter B. Littlewood, Andreas Löffler, Sven Höfling, Lukas Worschech, Alfred Forchel, and Yoshihisa Yamamoto. Power-law decay of the spatial correlation function in exciton-polariton condensates. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 109(17):6467–6472, 2012.

[17] Iacopo Carusotto and Cristiano Ciuti. Quantum fluids of light. *Rev. Mod. Phys.*, 85:299–366, Feb 2013.

[18] Hui Deng, Hartmut Haug, and Yoshihisa Yamamoto. Exciton-polariton bose-einstein condensation. *Rev. Mod. Phys.*, 82:1489–1537, May 2010.

[19] T. C. H. Liew, A. V. Kavokin, and I. A. Shelykh. Optical circuits based on polariton neurons in semiconductor microcavities. *Phys. Rev. Lett.*, 101:016402, Jul 2008.

[20] C. Adrados, T. C. H. Liew, A. Amo, M. D. Martín, D. Sanvitto, C. Antón, E. Giacobino, A. Kavokin, A. Bramati, and L. Viña. Motion of spin polariton bullets in semiconductor microcavities. *Phys. Rev. Lett.*, 107:146402, Sep 2011.

[21] D. Ballarini, M. De Giorgi, E. Cancellieri, R. Houdré, E. Giacobino, R. Cingolani, A. Bramati, G. Gigli, and D. Sanvitto. All-optical polariton transistor. *Nature Communications*, 4:1778 EP –, Apr 2013. Article.

[22] T. Gao, P. S. Eldridge, T. C. H. Liew, S. I. Tsintzos, G. Stavrinidis, G. Deligeorgis, Z. Hatzopoulos, and P. G. Savvidis. Polariton condensate transistor switch. *Phys. Rev. B*, 85:235102, Jun 2012.

[23] Christian Schneider, Arash Rahimi-Iman, Na Young Kim, Julian Fischer, Ivan G. Savenko, Matthias Amthor, Matthias Lermer, Adriana Wolf, Lukas Worschech, Vladimir D. Kulakovskii, Ivan A. Shelykh, Martin Kamp, Stephan Reitzenstein, Alfred Forchel, Yoshihisa Yamamoto, and Sven Hofling. An electrically pumped polariton laser. *Nature*, 497(7449):348–352, May 2013. Letter.

[24] Pallab Bhattacharya, Thomas Frost, Saniya Deshpande, Md Zunaid Baten, Arnab Hazari, and Ayan Das. Room temperature electrically injected polariton laser. *Phys. Rev. Lett.*, 112:236802, Jun 2014.

[25] A. Amo, S. Pigeon, D. Sanvitto, V. G. Sala, R. Hivet, I. Carusotto, F. Pisanello, G. Leménager, R. Houdré, E Giacobino, C. Ciuti, and A. Bramati. Polariton superfluids reveal quantum hydrodynamic solitons. *Science*, 332(6034):1167–1170, 2011.

[26] G. Grosso, G. Nardin, F. Morier-Genoud, Y. Léger, and B. Deveaud-Plédran. Dynamics of dark-soliton formation in a polariton quantum fluid. *Phys. Rev. B*, 86:020509, Jul 2012.

[27] R. Hivet, H. Flayac, D. D. Solnyshkov, D. Tanese, T. Boulier, D. Andreoli, E. Giacobino, J. Bloch, A. Bramati, G. Malpuech, and A. Amo. Half-solitons in a polariton quantum fluid behave like magnetic monopoles. *Nat Phys*, 8(10):724–728, Oct 2012.

[28] A. V. Yulin, O. A. Egorov, F. Lederer, and D. V. Skryabin. Dark polariton solitons in semiconductor microcavities. *Phys. Rev. A*, 78:061801, Dec 2008.

[29] Sich M., Krizhanovskii D N., Skolnick M S., Gorbach A V., Hartley R., Skryabin D V., Cerda-Mendez E A., Biermann K., Hey R., and Santos P V. Observation of bright polariton solitons in a semiconductor microcavity. *Nat Photon*, 6(1):50–55, Jan 2012.

[30] O. A. Egorov, D. V. Skryabin, A. V. Yulin, and F. Lederer. Bright cavity polariton solitons. *Phys. Rev. Lett.*, 102:153904, Apr 2009.

[31] O. A. Egorov, A. V. Gorbach, F. Lederer, and D. V. Skryabin. Two-dimensional localization of exciton polaritons in microcavities. *Phys. Rev. Lett.*, 105:073903, Aug 2010.

[32] O. A. Egorov, D. V. Skryabin, and F. Lederer. Parametric polariton solitons in coherently pumped semiconductor microcavities. *Phys. Rev. B*, 84:165305, Oct 2011.

[33] Elena A. Ostrovskaya, Jasur Abdullaev, Anton S. Desyatnikov, Michael D. Fraser, and Yuri S. Kivshar. Dissipative solitons and vortices in polariton bose-einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 86:013636, Jul 2012.

[34] E. A. Ostrovskaya, J. Abdullaev, M. D. Fraser, A. S. Desyatnikov, and Yu. S. Kivshar. Self-localization of polariton condensates in periodic potentials. *Phys. Rev. Lett.*, 110:170407, Apr 2013.

[35] Yan Xue and Michał Matuszewski. Creation and abrupt decay of a quasistationary dark soliton in a polariton condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 112:216401, May 2014.

[36] Eryk Infeld and George Rowlands. *Nonlinear waves, solitons and chaos.* Cambridge university press, 2000.

[37] Hermann A Haus and William S Wong. Solitons in optical communications. *Reviews of modern physics*, 68(2):423, 1996.

[38] F. Pinsker and H. Flayac. On-demand dark soliton train manipulation in a spinor polariton condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 112:140405, Apr 2014.

[39] H. Terças, D. D. Solnyshkov, and G. Malpuech. High-speed dc transport of emergent monopoles in spinor photonic fluids. *Phys. Rev. Lett.*, 113:036403, Jul 2014.

[40] Lev A. Smirnov, Daria A. Smirnova, Elena A. Ostrovskaya, and Yuri S. Kivshar. Dynamics and stability of dark solitons in exciton-polariton condensates. *Phys. Rev. B*, 89:235310, Jun 2014.

[41] Michiel Wouters and Iacopo Carusotto. Excitations in a nonequilibrium bose-einstein condensate of exciton polaritons. *Phys. Rev. Lett.*, 99:140402, Oct 2007.

[42] B.A. Malomed. Nonsteady waves in distributed dynamical systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 8(3):353 – 359, 1983.

[43] Wim van Saarloos and P.C. Hohenberg. Fronts, pulses, sources and sinks in generalized complex ginzburg-landau equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 56(4):303 – 367, 1992.

[44] Hidetsugu Sakaguchi. Phase dynamics and localized solutions to the ginzburg-landau type amplitude equations. *Progress of Theoretical Physics*, 89(6):1123–1146, 1993.

[45] Igor S. Aranson and Lorenz Kramer. The world of the complex ginzburg-landau equation. *Rev. Mod. Phys.*, 74:99–143, Feb 2002.

[46] Naoaki Bekki and Kazuhiro Nozaki. Formations of spatial patterns and holes in the generalized ginzburg-landau equation. *Physics Letters A*, 110(3):133 – 135, 1985.

[47] Luc Pastur, Mark-Tiele Westra, and Willem van de Water. Sources and sinks in 1d traveling waves. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 174(1–4):71 – 83, 2003. Papers from the Workshop on the Complex Ginzburg-Landau Equation: Theoretical Analysis and Experimental Applications in the Dynamics of Extended Systems.

[48] Martin van Hecke, Cornelis Storm, and Wim van Saarloos. Sources, sinks and wave-number selection in coupled {CGL} equations and experimental implications for counter-propagating wave systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 134(1):1 – 47, 1999.

[49] J. M. Soto-Crespo, N. Akhmediev, and A. Ankiewicz. Pulsating, creeping, and erupting solitons in dissipative systems. *Phys. Rev. Lett.*, 85:2937–2940, Oct 2000.

[50] N. Akhmediev, J. M. Soto-Crespo, and G. Town. Pulsating solitons, chaotic solitons, period doubling, and pulse coexistence in mode-locked lasers: Complex ginzburg-landau equation approach. *Phys. Rev. E*, 63:056602, Apr 2001.

[51] E. Wertz, L. Ferrier, D. D. Solnyshkov, R. Johne, D. Sanvitto, A. Lemaitre, I. Sagnes, R. Grousson, A. V. Kavokin, P. Senellart, G. Malpuech, and J. Bloch. Spontaneous formation and optical manipulation of extended polariton condensates. *Nat Phys*, 6(11):860–864, Nov 2010.

[52] Nataliya Bobrovska, Elena A. Ostrovskaya, and Michał Matuszewski. Stability and spatial coherence of nonresonantly pumped exciton-polariton condensates. *Phys. Rev. B*, 90:205304, Nov 2014.

[53] L. M. Sieberer, S. D. Huber, E. Altman, and S. Diehl. Dynamical critical phenomena in driven-dissipative systems. *Phys. Rev. Lett.*, 110:195301, May 2013.

[54] D. Tanese, H. Flayac, D. Solnyshkov, A. Amo, A. Lemaître, E. Galopin, R. Braive, P. Senellart, I. Sagnes, G. Malpuech, and J. Bloch. Polariton condensation in solitonic gap states in a one-dimensional periodic potential. *Nature Communications*, 4:1749 EP –, Apr 2013. Article.

[55] Catherine Sulem and Pierre-Louis Sulem. *The nonlinear Schrödinger equation: self-focusing and wave collapse*, volume 139. Springer Science & Business Media, 1999.

[56] Christopher J Pethick and Henrik Smith. *Bose-Einstein condensation in dilute gases*. Cambridge university press, 2002.

[57] Boris A. Malomed. Spatial solitons supported by localized gain. *J. Opt. Soc. Am. B*, 31(10):2460–2475, Oct 2014.

[58] William H Press, Saul A Teukolsky, William T Vetterling, and Brian P Flannery. *Numerical recipes in C*, volume 2. Cambridge Univ Press, 1982.

[59] Olaf Stiller, Stefan Popp, and Lorenz Kramer. From dark solitons in the defocusing nonlinear schrö dinger to holes in the complex ginzburg-landau equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 84(3):424–436, 1995.

[60] Thomas WB Kibble. Topology of cosmic domains and strings. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 9(8):1387, 1976.

[61] W. H. Zurek. Cosmological experiments in superfluid helium? *Nature*, 317(6037):505–508, Oct 1985.

[62] K. G. Lagoudakis, F. Manni, B. Pietka, M. Wouters, T. C. H. Liew, V. Savona, A. V. Kavokin, R. André, and B. Deveaud-Plédran. Probing the dynamics of spontaneous quantum vortices in polariton superfluids. *Phys. Rev. Lett.*, 106:115301, Mar 2011.

[63] Michał Matuszewski and Emilia Witkowska. Universality in nonequilibrium condensation of exciton-polaritons. *Phys. Rev. B*, 89:155318, Apr 2014.

[64] Jonathan Keeling and Natalia G. Berloff. Spontaneous rotating vortex lattices in a pumped decaying condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 100:250401, Jun 2008.

[65] T. Boulier, H. Terças, D. D. Solnyshkov, Q. Glorieux, E. Giacobino, G. Malpuech, and A. Bramati. Vortex chain in a resonantly pumped polariton superfluid. *Scientific Reports*, 5:9230, Mar 2015.

[66] F. Manni, K. G. Lagoudakis, T. C. H. Liew, R. André, and B. Deveaud-Plédran. Spontaneous pattern formation in a polariton condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 107:106401, Sep 2011.

[67] Alexander Dreismann, Peter Cristofolini, Ryan Balili, Gabriel Christmann, Florian Pinsker, Natasha G. Berloff, Zacharias Hatzopoulos, Pavlos G. Savvidis, and Jeremy J. Baumberg. Coupled counterrotating polariton condensates in optically defined annular potentials. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(24):8770–8775, 2014.

[68] A. J. Bray. Theory of phase-ordering kinetics. *Advances in Physics*, 51(2):481–587, 2002.

[69] John W Cahn. On spinodal decomposition. *Acta Metallurgica*, 9(9):795 – 801, 1961.

[70] Hiroshi Furukawa. A dynamic scaling assumption for phase separation. *Advances in Physics*, 34(6):703–750, 1985.

[71] Claudio Castellano, Santo Fortunato, and Vittorio Loreto. Statistical physics of social dynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 81:591–646, May 2009.

[72] Kedar Damle, Satya N. Majumdar, and Subir Sachdev. Phase ordering kinetics of the bose gas. *Phys. Rev. A*, 54:5037–5041, Dec 1996.

[73] Yu M Kagan, BV Svistunov, and GV Shlyapnikov. Kinetics of bose condensation in an interacting bose gas [sov. physics-jetp 74, 279-285 (february 1992)]. *JETP*, 74(2):387, 1992.

[74] Natalia G. Berloff and Boris V. Svistunov. Scenario of strongly nonequilibrated bose-einstein condensation. *Phys. Rev. A*, 66:013603, Jul 2002.

[75] Subroto Mukerjee, Cenke Xu, and J. E. Moore. Dynamical models and the phase ordering kinetics of the $s = 1$ spinor condensate. *Phys. Rev. B*, 76:104519, Sep 2007.

[76] Johannes Hofmann, Stefan S. Natu, and S. Das Sarma. Coarsening dynamics of binary bose condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 113:095702, Aug 2014.

[77] Kazue Kudo and Yuki Kawaguchi. Magnetic domain growth in a ferromagnetic bose-einstein condensate: Effects of current. *Phys. Rev. A*, 88:013630, Jul 2013.

[78] Kazue Kudo and Yuki Kawaguchi. Coarsening dynamics driven by vortex-antivortex annihilation in ferromagnetic bose-einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 91:053609, May 2015.

[79] Lewis A. Williamson and P. B. Blakie. Universal coarsening dynamics of a quenched ferromagnetic spin-1 condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 116:025301, Jan 2016.

[80] T. C. H. Liew, O. A. Egorov, M. Matuszewski, O. Kyriienko, X. Ma, and E. A. Ostrovskaya. Instability-induced formation and nonequilibrium dynamics of phase defects in polariton condensates. *Phys. Rev. B*, 91:085413, Feb 2015.

[81] D. Sanvitto, F. M. Marchetti, M. H. Szymanska, G. Tosi, M. Baudisch, F. P. Laussy, D. N. Krizhanovskii, M. S. Skolnick, L. Marrucci, A. Lemaitre, J. Bloch, C. Tejedor, and L. Vina. Persistent currents and quantized vortices in a polariton superfluid. *Nat Phys*, 6(7):527–533, Jul 2010.

[82] Gael Nardin, Gabriele Grosso, Yoan Leger, Barbara Piętka, Francois Morier-Genoud, and Benoit Deveaud-Pledran. Hydrodynamic nucleation of quantized vortex pairs in a polariton quantum fluid. *Nat Phys*, 7(8):635–641, Aug 2011.

[83] G. Grosso, G. Nardin, F. Morier-Genoud, Y. Léger, and B. Deveaud-Plédran. Soliton instabilities and vortex street formation in a polariton quantum fluid. *Phys. Rev. Lett.*, 107:245301, Dec 2011.

[84] M D Fraser, G Roumpos, and Y Yamamoto. Vortex–antivortex pair dynamics in an exciton–polariton condensate. *New Journal of Physics*, 11(11):113048, 2009.

[85] M. Toledo-Solano, M. E. Mora-Ramos, A. Figueroa, and Y. G. Rubo. Warping and interactions of vortices in exciton-polariton condensates. *Phys. Rev. B*, 89:035308, Jan 2014.

[86] D. N. Krizhanovskii, D. M. Whittaker, R. A. Bradley, K. Guda, D. Sarkar, D. Sanvitto, L. Vina, E. Cerda, P. Santos, K. Biermann, R. Hey, and M. S. Skolnick. Effect of interactions on vortices in a nonequilibrium polariton condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 104:126402, Mar 2010.

[87] M. H. Szymańska, F. M. Marchetti, and D. Sanvitto. Propagating wave packets and quantized currents in coherently driven polariton superfluids. *Phys. Rev. Lett.*, 105:236402, Nov 2010.

[88] Georgios Roumpos, Michael D. Fraser, Andreas Loffler, Sven Hofling, Alfred Forchel, and Yoshihisa Yamamoto. Single vortex-antivortex pair in an exciton-polariton condensate. *Nat Phys*, 7(2):129–133, Feb 2011.

[89] F. M. Marchetti, M. H. Szymańska, C. Tejedor, and D. M. Whittaker. Spontaneous and triggered vortices in polariton optical-parametric-oscillator superfluids. *Phys. Rev. Lett.*, 105:063902, Aug 2010.

[90] Gaël Nardin, Konstantinos G. Lagoudakis, Barbara Pietka, Fran çois Morier-Genoud, Yoan Léger, and Benoît Deveaud-Plédran. Selective photoexcitation of confined exciton-polariton vortices. *Phys. Rev. B*, 82:073303, Aug 2010.

[91] G. Tosi, G. Christmann, N. G. Berloff, P. Tsotsis, T. Gao, Z. Hatzopoulos, P. G. Savvidis, and J. J. Baumberg. Geometrically locked vortex lattices in semiconductor quantum fluids. *Nature Communications*, 3:1243, Dec 2012. Article.

[92] G. Tosi, F. M. Marchetti, D. Sanvitto, C. Antón, M. H. Szymańska, A. Berceanu, C. Tejedor, L. Marrucci, A. Lemaître, J. Bloch, and L. Viña. Onset and dynamics of vortex-antivortex pairs in polariton optical parametric oscillator superfluids. *Phys. Rev. Lett.*, 107:036401, Jul 2011.

[93] SanvittoD., PigeonS., AmoA., BallariniD., De GiorgiM., CarusottoI., HivetR., PisanelloF., SalaV G., GuimaraesP S. S., HoudreR., GiacobinoE., CiutiC., BramatiA., and GigliG. All-optical control of the quantum flow of a polariton condensate. *Nat Photon*, 5(10):610–614, Oct 2011.

[94] Lorenzo Dominici, Galbadrakh Dagvadorj, Jonathan M. Fellows, Dario Ballarini, Milena De Giorgi, Francesca M. Marchetti, Bruno Piccirillo, Lorenzo Marrucci, Alberto Bramati, Giuseppe Gigli, Marzena H. Szymańska, and Daniele Sanvitto. Vortex and half-vortex dynamics in a nonlinear spinor quantum fluid. *Science Advances*, 1(11), 2015.

[95] Nataliya Bobrovska and Michał Matuszewski. Adiabatic approximation and fluctuations in exciton-polariton condensates. *Phys. Rev. B*, 92:035311, Jul 2015.

[96] G. Dagvadorj, J. M. Fellows, S. Matyjaśkiewicz, F. M. Marchetti, I. Carusotto, and M. H. Szymańska. Nonequilibrium phase transition in a two-dimensional driven open quantum system. *Phys. Rev. X*, 5:041028, Nov 2015.

[97] Davide Caputo, Dario Ballarini, Galbadrakh Dagvadorj, Carlos Sánchez Muñoz, Milena De Giorgi, Lorenzo Dominici, Kenneth West, Loren N. Pfeiffer, Giuseppe Gigli, Fabrice P. Laussy, Marzena H. Szymanska, and Daniele Sanvitto. Topological order and thermal equilibrium in polariton condensates. *Nature Materials*, Dec 2017.

[98] A. N. Pargellis, P. Finn, J. W. Goodby, P. Panizza, B. Yurke, and P. E. Cladis. Defect dynamics and coarsening dynamics in smectic-c films. *Phys. Rev. A*, 46:7765–7776, Dec 1992.

[99] Wolfgang H. Nitsche, Na Young Kim, Georgios Roumpos, Christian Schneider, Martin Kamp, Sven Höfling, Alfred Forchel, and Yoshihisa Yamamoto. Algebraic order and the berezinskii-kosterlitz-thouless transition in an exciton-polariton gas. *Phys. Rev. B*, 90:205430, Nov 2014.

[100] Giulio Biroli, Leticia F. Cugliandolo, and Alberto Sicilia. Kibble-zurek mechanism and infinitely slow annealing through critical points. *Phys. Rev. E*, 81:050101, May 2010.

[101] P. C. Hohenberg and B. I. Halperin. Theory of dynamic critical phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, 49:435–479, Jul 1977.

[102] Hiroshi Furukawa. Effect of inertia on droplet growth in a fluid. *Phys. Rev. A*, 31:1103–1108, Feb 1985.

[103] B. Yurke, A. N. Pargellis, T. Kovacs, and D. A. Huse. Coarsening dynamics of the xy model. *Phys. Rev. E*, 47:1525–1530, Mar 1993.

[104] A. J. Bray, A. J. Briant, and D. K. Jervis. Breakdown of scaling in the nonequilibrium critical dynamics of the two-dimensional XY model. *Phys. Rev. Lett.*, 84:1503–1506, Feb 2000.

[105] R. E. Blundell and A. J. Bray. Phase-ordering dynamics of the o(n) model: Exact predictions and numerical results. *Phys. Rev. E*, 49:4925–4937, Jun 1994.

[106] Asja Jelić and Leticia F Cugliandolo. Quench dynamics of the 2d xy model. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2011(02):P02032, 2011.

[107] A. D. Rutenberg and A. J. Bray. Energy-scaling approach to phase-ordering growth laws. *Phys. Rev. E*, 51:5499–5514, Jun 1995.

[108] A. J. Bray and A. D. Rutenberg. Growth laws for phase ordering. *Phys. Rev. E*, 49:R27–R30, Jan 1994.

[109] Iacopo Carusotto and Cristiano Ciuti. Spontaneous microcavity-polariton coherence across the parametric threshold: Quantum monte carlo studies. *Phys. Rev. B*, 72:125335, Sep 2005.

[110] Michiel Wouters and Vincenzo Savona. Stochastic classical field model for polariton condensates. *Phys. Rev. B*, 79:165302, Apr 2009.

[111] Michiel Wouters and Iacopo Carusotto. Superfluidity and critical velocities in nonequilibrium bose-einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 105:020602, Jul 2010.

[112] M. Wouters, T. C. H. Liew, and V. Savona. Energy relaxation in one-dimensional polariton condensates. *Phys. Rev. B*, 82:245315, Dec 2010.

[113] Andrew Yates and Wojciech H. Zurek. Vortex formation in two dimensions: When symmetry breaks, how big are the pieces? *Phys. Rev. Lett.*, 80:5477–5480, Jun 1998.

[114] Sven Deutschländer, Patrick Dillmann, Georg Maret, and Peter Keim. Kibble–zurek mechanism in colloidal monolayers. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112(22):6925–6930, 2015.

[115] M. H. Szymańska, J. Keeling, and P. B. Littlewood. Nonequilibrium quantum condensation in an incoherently pumped dissipative system. *Phys. Rev. Lett.*, 96:230602, Jun 2006.

[116] Ehud Altman, Lukas M. Sieberer, Leiming Chen, Sebastian Diehl, and John Toner. Two-dimensional superfluidity of exciton polaritons requires strong anisotropy. *Phys. Rev. X*, 5:011017, Feb 2015.

[117] Alexander L Fetter and Anatoly A Svidzinsky. Vortices in a trapped dilute bose-einstein condensate. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 13(12):R135, 2001.

[118] G. Wachtel, L. M. Sieberer, S. Diehl, and E. Altman. Electrodynamic duality and vortex unbinding in driven-dissipative condensates. *Phys. Rev. B*, 94:104520, Sep 2016.

[119] J M Kosterlitz and D J Thouless. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 6(7):1181, 1973.

[120] Zheng Han, Adrien Allain, Hadi Arjmandi-Tash, Konstantin Tikhonov, Mikhail Feigel'man, Benjamin Sacepe, and Vincent Bouchiat. Collapse of superconductivity in a hybrid tin-graphene josephson junction array. *Nat Phys*, 10(5):380–386, May 2014. Article.

[121] G. Agnolet, D. F. McQueeney, and J. D. Reppy. Kosterlitz-thouless transition in helium films. *Phys. Rev. B*, 39:8934–8958, May 1989.

[122] V. Juricic, L. Benfatto, A. O. Caldeira, and C. Morais Smith. Dissipative dynamics of topological defects in frustrated heisenberg spin systems. *Phys. Rev. B*, 71:064421, Feb 2005.

[123] Graham R. Dennis, Joseph J. Hope, and Mattias T. Johnsson. Xmds2: Fast, scalable simulation of coupled stochastic partial differential equations. *Computer Physics Communications*, 184(1):201 – 208, 2013.