

Dynamika kondensatu Bosego-Einsteina w temperaturze różnej od zera

Agnieszka Górecka

Praca doktorska

wykonana w Zakładzie Optyki Kwantowej ON-2.6

Instytutu Fizyki Polskiej Akademii Nauk

pod kierunkiem

doc. dr hab. Mariusza Gajdy

Warszawa, wrzesień 2009

Podziękowania

Autorka chciałaby podziękować:

- *Promotorowi, Panu doc. dr hab. Mariuszowi Gajdzie,
za opiekę podczas doktoratu i wiele lat wspólnej pracy,*
- *Współpracownikom z Zakładu Optyki Kwantowej, IF PAN,
za miłą atmosferę pracy,*
- *dr Emilii Witkowskiej za pomoc i wiele owocnych dyskusji,*
- *Rodzicom i Bratu, Adamowi za pomoc i wsparcie,*
- *Ewelinie, Agnieszce i Wojtkowi.*

Spis treści

1	Wstęp	7
2	Kondensat Bosego-Einsteina	10
2.1	Wstęp	10
2.2	Otrzymywanie kondensatu	14
2.2.1	Chłodzenie laserowe	14
2.2.2	Chłodzenie przez parowanie	16
2.2.3	Doświadczenia nad kondensatem Bosego-Einsteina	17
3	Teoretyczny opis kondensatu	18
3.1	Kondensat Bosego-Einsteina - definicja Penrose'a i Onsagera	18
3.2	Metoda Bogoliubowa - opis kondensatu w temperaturze bliskiej zera bezwzględnego	19
3.3	Metoda pól klasycznych	23
3.4	Inne metody opisu BEC w temperaturze większej od zera bezwzględnego	29
4	Kwantowa destylacja kondensatu Bosego-Einsteina – wyniki numeryczne	30
4.1	Wstęp	30
4.1.1	Doświadczenie	31
4.2	Obliczenia numeryczne	32
4.3	Potencjał pułapkujący	33
4.4	Przybliżenia	34
4.5	Stan początkowy	35

4.6	Wyniki	39
4.6.1	Poszukiwanie nowego minimum	43
4.6.2	Nagły transfer atomów	46
4.6.3	Dochodzenie do stanu równowagi	48
4.7	Wnioski	49
5	Interferencja oddziałujących kondensatów – wyniki numeryczne	51
5.1	Wstęp	51
5.2	Doświadczenie	53
5.3	Wyniki numeryczne	54
5.4	Stan początkowy	56
5.5	Wyniki	58
5.5.1	Szybkie łączenie – $t_m = 6t_0$	58
5.5.2	Reżim zwiększonej czułości – $t_m = 32t_0$ i $t_m = 64t_0$	60
5.5.3	Łączenie adiabatyczne – $t_m = 300t_0$	62
5.6	Reżim zwiększonej czułości – $t_m = 32t_0$ i $t_m = 64t_0$, przypadek ze strata- tami atomów	63
5.7	Wnioski	65
6	Wnioski	67

Rozdział 1

Wstęp

Opis teoretyczny dynamiki układów kwantowych jest trudnym problemem. W odróżnieniu od dobrze opracowanych algorytmów poszukiwania stanu podstawowego układu kwantowego, metody rozwiązywania równań opisujących ewolucję układu kwantowego w czasie są nadal przedmiotem badań i dyskusji.

Jedną z metod opisu układów kwantowych złożonych z wielu ciał jest metoda pól klasycznych [1]. Stosuje się ona do opisu układów gazów bozonowych, w temperaturze niższej niż temperatura krytyczna (temperatura kondensacji), ale większej od zera. Metoda ta pozwala na uwzględnienie w obliczeniach nie tylko frakcji atomów skondensowanych, ale również atomów tworzących chmurę termiczną.

Głównym celem mojej pracy doktorskiej jest zbadanie dynamiki kondensatu Bosego-Einsteina w temperaturze większej od zera bezwzględnego w układach, w których frakcja atomów skondensowanych w układzie dynamicznie zmienia się w czasie. Tezą mojej rozprawy jest wykazanie, że metoda pól klasycznych dostarcza wiarygodnego opisu dynamiki zmian zachodzących w układach kwantowych dalekich od równowagi termodynamicznej. Argumentu na poparcie powyższego stwierdzenia dostarcza porównanie wyników przeprowadzonych przeze mnie symulacji numerycznych opisanych w tej pracy z wynikami doświadczalnymi znanymi z literatury.

Przedmiotem symulacji numerycznych były procesy zachodzące w kondensacie Bosego-Einsteina umieszczonym w zmiennej w czasie, podwójnej studni potencjału, jakie przeprowadziłam pod kierunkiem doc. dr hab. Mariusza Gajdy w zespole Optyki Kwan-

towej ON 2.6 Instytutu Fizyki PAN.

W swojej pracy badałam dwa ważne zagadnienia związane z dynamiką kondensatu Bosego-Einsteina w zmiennej w czasie studni. Pierwszym zagadnieniem jest kwantowa destylacja kondensatu Bosego-Einsteina. Druga część pracy to badanie interferometru złożonego z dwóch kondensatów Bosego-Einsteina, w temperaturze większej od zera bezwzględnego, przy uwzględnieniu oddziaływań pomiędzy atomami w układzie. W obu przypadkach otrzymałam wyniki numeryczne, które zgadzają się z danymi doświadczalnymi oraz zaproponowałam interpretację fizyczną obu zjawisk.

Moja rozprawa doktorska składa się z następujących części:

- W **drugim rozdziale** wprowadzam pojęcie kondensatu Bosego-Einsteina. Krótko przybliżam historię odkrycia kondensatu, jego podstawowe własności, sposób otrzymywania oraz najważniejsze doświadczenia związane z kondensatem. Krótko opisuję znaczenie badań kondensatu Bosego-Einsteina dla nauki oraz jego potencjalne zastosowania.
- W **trzecim rozdziale** podaję definicję kondensatu Bosego-Einsteina według Penrose'a i Onsagera, krótko przedstawiam metodę Bogoliubowa opisu kondensatu w temperaturze bliskiej zera bezwzględnego oraz metodę pól klasycznych, która jest naturalnym rozszerzeniem metody Bogoliubowa na przypadki o temperaturze większej od zera bezwzględnego. Przytaczam też główne idee innych metod opisu kondensatu Bosego-Einsteina w temperaturach większych od zera.
- W **czwartym rozdziale** opisuję symulacje numeryczne związane z kwantową destylacją kondensatu Bosego-Einsteina. W ramach jednowymiarowego modelu pokazuję, jak wygląda mechanizm znajdowania przez kondensat nowego minimum, powstałego w wyniku dynamicznej zmiany potencjału pułapującego oraz jak przebiega przejście atomów do nowego stanu podstawowego pułapki. Przy pomocy metody pól klasycznych wykazuję, że przepływ atomów ma charakter kwantowy i jest procesem koherentnym.
- W **piątym rozdziale** przedstawiam wyniki badań interferencji dwóch kondensatów Bosego-Einsteina o dobrze określonej różnicy faz, w temperaturze większej

od zera. Pokazuję, że dla pewnego przedziału czasów łączenia kondensatów, oddziaływania między atomami, które normalnie zaburzają odczyty interferometru, prowadzą do podgrzania dwóch łączących się kondensatów. Stopień podgrzania zależy od względnej fazy dwóch kondensatów. Co za tym idzie, liczba skondensowanych atomów w układzie po połączeniu może być wykorzystana do dokładnego pomiaru różnicy fazy między kondensatami.

- W **rozdziale szóstym** podsumowuję uzyskane wyniki.

Rozdział 2

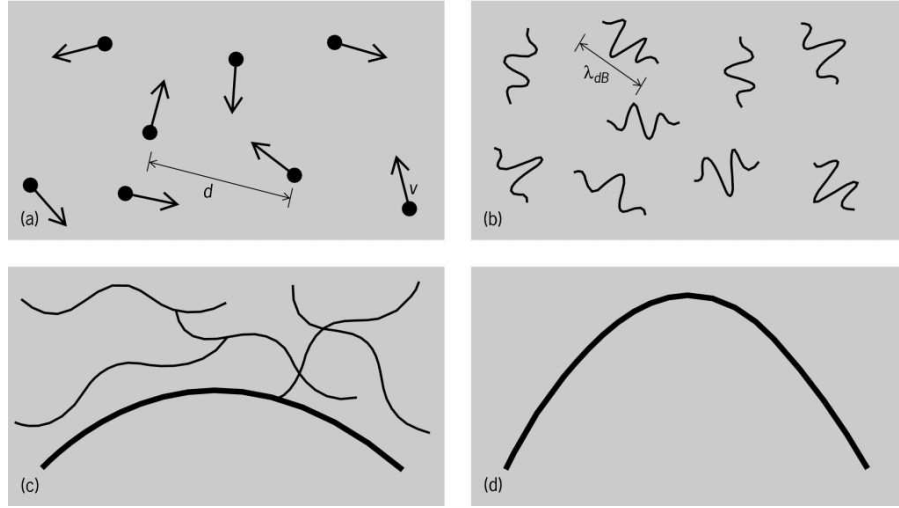
Kondensat Bosego-Einsteina

W tym rozdziale wprowadzam pojęcie kondensatu Bosego-Einsteina. Opisuję krótko historię odkrycia kondensatu Bosego-Einsteina, jego podstawowe własności, sposób otrzymywania oraz najważniejsze doświadczenia związane z kondensatem.

2.1 Wstęp

Zjawisko kondensacji Bosego-Einsteina zostało przewidziane przez Einsteina w 1924 roku [3]. Einstein w swoich rozważaniach uogólnił pomysł Bosego dotyczący fotonów [2]. Einstein wykazał, że w układzie bozonów, czyli cząstek o całkowitym spinie, które opisane są za pomocą statystyki Bosego, istnieje pewna temperatura krytyczna T_c , poniżej której makroskopowa liczba cząstek „kondensuje” w tym samym jednocząstkowym stanie. Jest to stan podstawowy danego układu. Wyjątkową cechą kondensatu jest to, że jeden stan jest makroskopowo obsadzony nawet, gdy energia układu pozwala na inne rozłożenie cząstek po stanach. Przewidywania Einsteina dotyczyły gazu nieoddziałującego.

Przejście do kondensatu zachodzi, gdy termiczna długość fali de Broglie’a cząstek jest porównywalna ze średnią odległością między atomami d . W miarę obniżania temperatury długość fali de Broglie’a zwiększa się. Dla wysokich temperatur długość fali de Broglie’a jest mała - mniejsza od rozmiaru cząstki. Wtedy możemy traktować cząstki jako klasyczne twarde kule. W miarę zmniejszania się temperatury długość fali de Bro-



Rysunek 2.1: Schemat kondensacji gazu bozonowego. Obrazek (a) przedstawia atomy termiczne, fala de Broglie’a związana z danym atomem jest mała w porównaniu z rozmiarem atomu i odległością między atomami d . (b) Atomy w niskiej temperaturze, fala de Broglie’a związana z atomem jest większa od rozmiaru atomu. (c) Gaz bozonowy w temperaturze poniżej temperatury krytycznej T_c , długość fali de Broglie’a jest porównywalna z odległościami między atomami. Pojawia się kondensat (makroskopowo obsadzony stan), a pozostałe atomy tworzą chmurę termiczną. (d) Kondensat w temperaturze zera bezwzględnego, znika chmura termiczna, pozostają tylko atomy skondensowane. Układ opisany jest jedną globalną funkcją falową. Rysunek pochodzi z pracy [4].

glie’a związanej z cząstką rośnie. Gdy staje się porównywalna ze średnimi odległościami między cząstkami d , fale zaczynają się nakładać, cząstki tracą swój indywidualny charakter i zachodzi kondensacja. W większości przypadków towarzyszy temu przemiana fazowa. Przemiana fazowa, rozumiana jako skokowa zmiana parametrów układu a nie jako pojawienie się kondensatu, nie zachodzi na przykład dla jednowymiarowego gazu w pudełku z periodycznymi warunkami brzegowymi, ale kondensat w takim układzie istnieje. Dla temperatur bliskich zera bezwzględnego praktycznie wszystkie cząstki znajdują się w stanie o najniższej energii i układ opisany jest jedną globalną funkcją falową. Schemat kondensacji pokazuje rysunek 2.1.

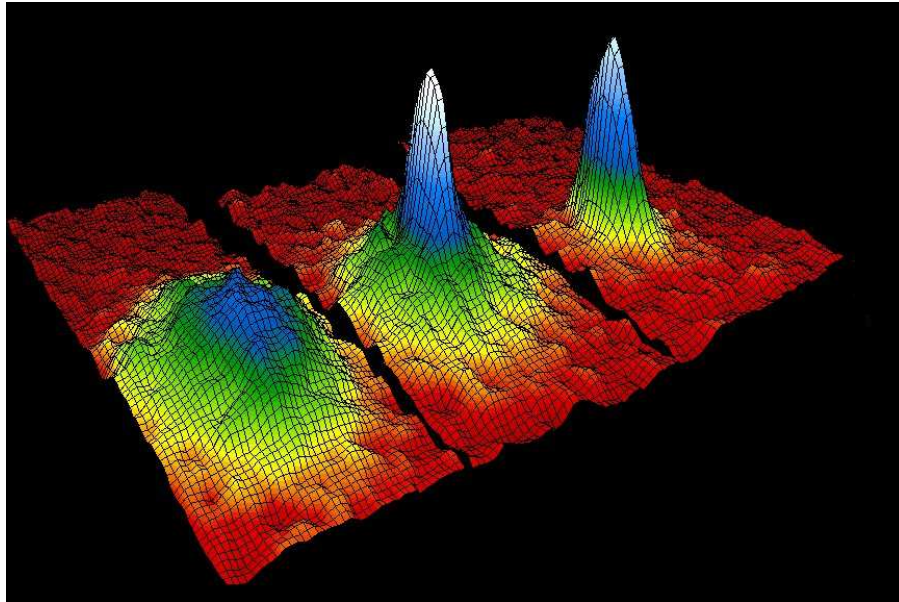
Przez długi czas fenomen kondensacji Bosego - Einsteina był traktowany przez na-

ukowców jako ciekawostka. Uważano, że zanim układ osiągnie temperaturę krytyczną atomy przejdą do fazy stałej lub ciekłej. W tym czasie jednym eksperymentem potwierdzającym zjawisko kondensacji było zaobserwowanie nadciekłości w ciekłym helu ^4He . Przypuszczano, że mimo bardzo silnych oddziaływań w ciekłym helu, w układzie powstawał kondensat Bosego-Einsteina i właśnie on odpowiadał za nadciekłość.

Od połowy lat dziewięćdziesiątych przedmiotem intensywnych badań stał się kondensat otrzymywany w rozrzedzonym gazie atomowym.

Należy wspomnieć, że gaz atomowy ochłodzony do bardzo niskiej temperatury nie jest układem stabilnym termodynamicznie – w takich warunkach układ z reguły znajduje się w stanie ciekłym lub stałym. Istotne dla otrzymania kondensatu było wyeliminowanie z układu zderzeń trójciałowych, które powodują tworzenie klastrów atomowych oraz sprzyjają przejściu układu w fazę gęstą. Rozwiązaniem tego problemu było obniżenie gęstości ochładzanego gazu. Dla przykładu, typowe gęstości gazu poddawane kondensacji wynoszą około 10^{14} atomów na centymetr sześcienny, podczas gdy w powietrzu w temperaturze pokojowej znajduje się około 10^{19} cząstek na centymetr sześcienny. Dla gęstości atomów rzędu 10^{14} atomów na centymetr sześcienny kondensat pojawia się w temperaturze rzędu setek nanokelwinów (temperatury krytyczne różnią się w zależności od tego, jakie atomy są ochładzane). Oczywiście w takim przypadku zderzenia trójciałowe nadal występują, są jednak bardzo rzadkie i średni czas życia kondensatu dochodzi do kilkunastu sekund. W przypadku wszelkich doświadczeń nad kondensatem należy brać pod uwagę straty atomów - część z nich opuszcza układ na skutek zderzeń trójciałowych, inne wypadają z pułapek, w których trzymany jest kondensat.

Pierwsza realizacja doświadczalna kondensatu Bosego-Einsteina miała miejsce w 1995 roku. Kondensat otrzymano prawie jednocześnie w dwóch grupach doświadczalnych - grupie Erica Cornella w laboratoriach JILA (Boulder, Kolorado, USA), gdzie skondensowano atomy rubidu (^{87}Rb) [5] oraz w grupie Wolfganga Ketterlego (w MIT, Cambridge, Massachusetts, USA), gdzie skondensowano atomy sodu (^{23}Na) [6]. Rysunek 2.2 przedstawia najsłynniejsze zdjęcie kondensatu wykonane w grupie Cornella. Widać na nim rozkład prędkości w chmurze atomów dla trzech różnych temperatur,



Rysunek 2.2: Rozkład prędkości w chmurze termicznej dla trzech różnych temperatur. Temperatura maleje od lewej do prawej strony. Środek siatki odpowiada prędkości $\mathbf{v} = 0$. Rysunek po lewej stronie przedstawia układ tuż przed kondensacją - nie ma pików w rozkładzie prędkości, rozkład jest gładki. Środkowy rysunek przedstawia układ zaraz po kondensacji, widać kondensat i chmurę termiczną. Na rysunku po prawej stronie w układzie jest praktycznie sam kondensat. Rysunek pochodzi ze strony laboratorium JILA [8], przedstawia rozkład prędkości atomów z doświadczenia Andersona, *et al.* dla atomów rubidu ^{87}Rb .

temperatury maleją od lewej do prawej strony. Na lewym rysunku widać układ tuż przed kondensacją. Nie ma wyraźnego pików w gęstości rozkładu prędkości dla $\mathbf{v} = 0$, który sugerowałby, że makroskopowa część atomów znajduje się w stanie podstawowym układu. Na środkowym rysunku widać układ w temperaturze niższej niż temperatura krytyczna T_c . W rozkładzie jest wyraźny pik dla niskich prędkości, ale poza tym widać cząstki o wyższych prędkościach. Te cząstki tworzą chmurę termiczną. Prawy rysunek przedstawia kondensat w temperaturze bliskiej zera bezwzględnego. Praktycznie wszystkie cząstki znajdują się w kondensacie. W 2001 roku Eric Cornell, Carl Wieman i Wolfgang Ketterle zostali uhonorowani Nagrodą Nobla za doświadczalną realizację kondensatu Bosego-Einsteina.

Od tego czasu kondensat uzyskano w wielu różnych grupach badawczych, między innymi w Polsce, w laboratoriach FAMO w Toruniu w 2007 roku [7]. Atomy stosowane w doświadczeniach to między innymi rubid, sól, potas, lit, chrom, hel i wodór. Typowe temperatury kondensacji wynoszą od dziesiątek nanokelwinów do kilku mikrokelwinów, typowe gęstości gazów atomowych są równe około $10^{12} - 10^{15}$ atomów na centymetr sześcienny, liczba cząstek w kondensacie waha się od kilku setek do kilku milionów. Kształt kondensatu zależy od kształtu pułapki, w której trzymane są atomy oraz siły i znaku oddziaływań między atomami. Spotyka się kondensaty o symetrii sferycznej (kuliste) oraz osiowej (kształt cygara lub dysku).

2.2 Otrzymywanie kondensatu

Otrzymywanie kondensatu Bosego-Einsteina przebiega w dwóch etapach. Najpierw wstępnie schłodzone atomy są poddawane chłodzeniu laserowemu w pułapce magneto-optycznej, a następnie przenoszone do pułapki magnetycznej i chłodzone przez odparowanie. Poniżej opisano krótko oba sposoby chłodzenia.

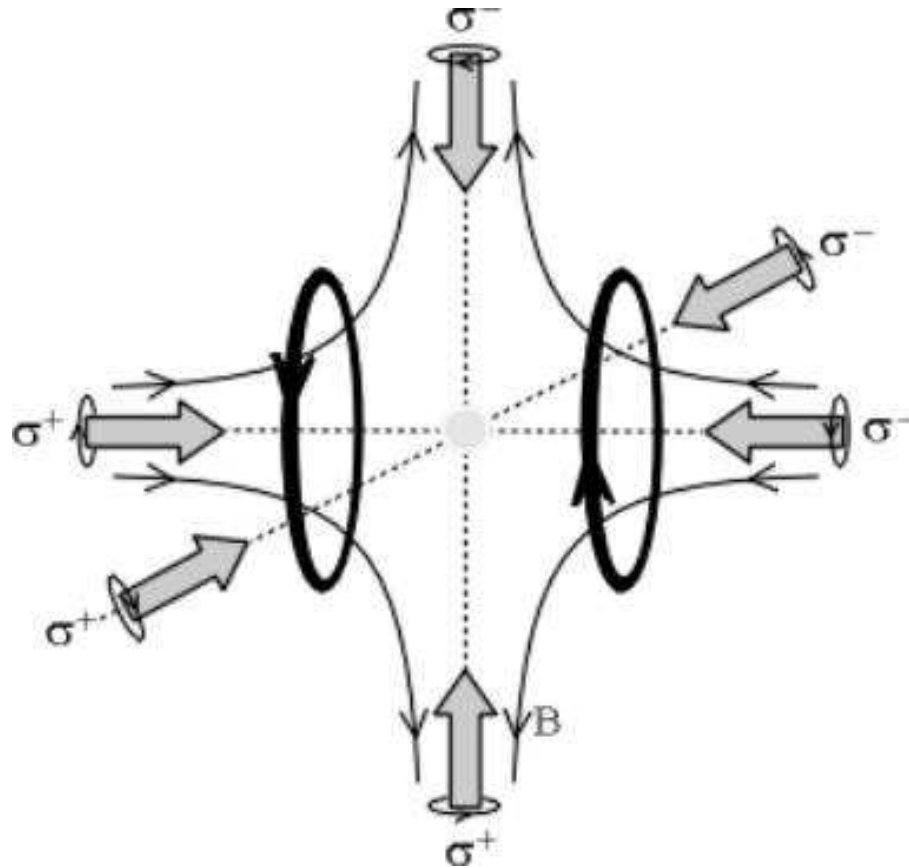
2.2.1 Chłodzenie laserowe

Fotony niosą pęd związany z ich wektorem falowym $\vec{k}$:

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}, \quad (2.1)$$

gdzie $\hbar$ to stała Plancka.

Podczas absorpcji fotonu atomowi przekazany jest pęd równy pędowi pochłoniętego fotonu. Następnie atom spontanicznie emituje foton w losowym kierunku. Po wielu aktach absorpcji i emisji, wypadkowa siła związana z emisją fotonów działająca na atom uśrednia się do zera. Jeżeli wiązka światła pada na atom tylko z jednego kierunku, to efektywnie na cząstkę działa tylko siła związana z przekazem pędu podczas absorpcji. Na tej zasadzie opiera się idea chłodzenia laserowego [10]. Dla uproszczenia opiszę je dla przypadku jednowymiarowego. Dwie przeciwbieżne wiązki laserowe oświetlają chmurę atomów. Częstości promieniowania dobrane są w taki sposób, aby

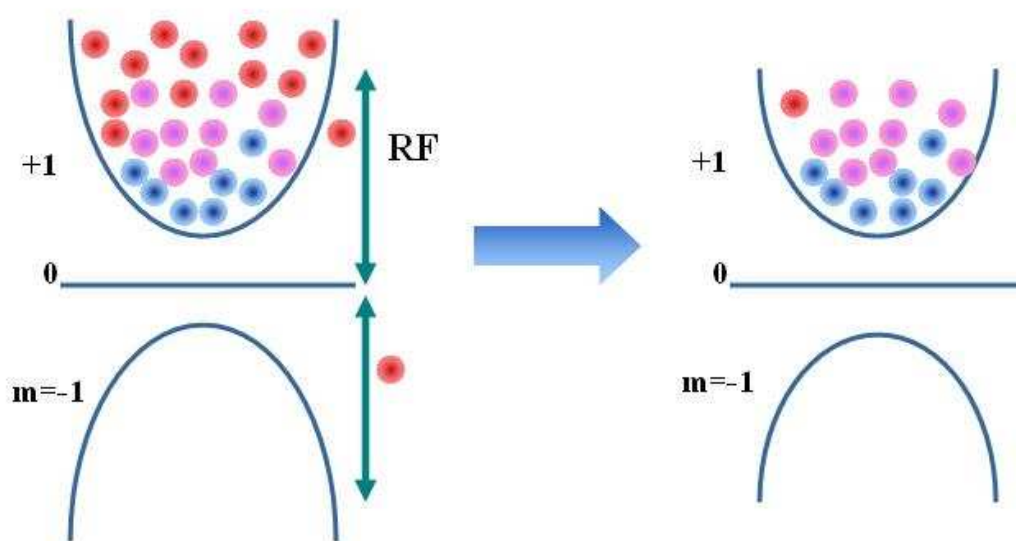


Rysunek 2.3: Schemat pułapki magnetoptycznej. Widać trzy pary przeciwbieżnych wiązek laserowych oraz cewki wytwarzające kwadrupolowe pole magnetyczne. Rysunek pochodzi ze strony [9].

po uwzględnieniu efektu Dopplera, związanego z prędkością poruszającego się atomu, odpowiadały energii wzbudzenia atomów poruszających się w kierunku źródła wiązki. Dzięki temu, światło absorbują tylko atomy uciekające z pułapki. Atomy są spowalniane, a wypadkowa siła, działająca na cząstkę sprawia, że atomy w takim układzie zachowują się jakby płynęły w gęstej cieczy, stąd taki układ nazywany jest melasą optyczną. W takim układzie spowolnione atomy poruszają się w obszarze przecięcia wiązek atomowych (rysunek 2.3). Dodatkowo, aby uwięzić atomy w jednym miejscu, w układzie znajdują się dwie cewki wytwarzające pole magnetyczne o stałym gradiencie z zerową wartością pola w centrum pułapki. Pole wywołuje rozszczepienie zeemanskie podpoziomów w atomach - tym większe im większe jest pole, czyli im dalej atom znajduje się od centrum pułapki. Przy odpowiednim zsynchronizowaniu często-

ści wiązek można ochłodzić gaz atomowy do temperatur rzędu setek mikrokKelwinów. Ponieważ przy pojedynczym procesie emisji spontanicznej fotonu atom zyskuje pewien pęd (skierowany przypadkowo) metoda ta nie pozwala na osiągnięcie dowolnie niskich temperatur. W doświadczeniu stosuje się układ trzech prostopadłych par przeciwbieżnych wiązek i dwóch cewek wytwarzających kwadrupolowe pole magnetyczne. Taki układ nosi nazwę pułapki magnetoptycznej, w skrócie MOT. Rysunek 2.3 przedstawia schemat pułapki magnetoptycznej.

2.2.2 Chłodzenie przez parowanie



Rysunek 2.4: Schemat chłodzenia przez parowanie. Rysunek pochodzi ze strony [11].

Po schłodzeniu atomów za pomocą laserów cząstki są przepompowywane optycznie do pułapki magnetycznej i poddane chłodzeniu przez parowanie. Atomy utrzymywane są w kwadrupolowym polu magnetycznym. Idea chłodzenia opiera się na zmianie orientacji spinu najszybszych atomów w układzie za pomocą promieniowania o częstotliwości radiowej. Gdy zmienia się spin cząstki, zmienia się znak oddziaływań związanych z polem magnetycznym i zamiast przyciągającego potencjału atom czuje potencjał o kształcie odwróconej paraboli i ucieka z układu. W miarę pozbywania się wysokoenergetycznych atomów częstość jest zmniejszana, dzięki czemu usuwane są coraz wolniejsze atomy, aż

do uzyskania temperatury kondensacji. Ważne jest dobranie odpowiedniego tempa wyrzucania atomów, aby zachowana była odpowiednia gęstość gazu atomowego oraz aby otrzymać właściwą temperaturę. Schemat chłodzenia przez parowanie pokazany jest na rysunku 2.4.

2.2.3 Doświadczenia nad kondensatem Bosego-Einsteina

Kondensat opisany jest pojedynczą funkcją falową. Oznacza to, że cały obiekt ma jedną stałą fazę. Przeprowadzono wiele ważnych doświadczeń wykorzystujących kondensat Bosego-Einsteina. Pokazano naturę falową kondensatu, między innymi przeprowadzając analog doświadczenia Younga [12] i interferencję dwóch niezależnych kondensatów [13]. Wykazano istnienie wirów w kondensacie [14]. Dostrzeżono wiele analogii z optyką nieliniową, jak istnienie ciemnych i jasnych solitonów [15, 16] oraz mieszanie czterech fal [17]. Zaobserwowano efekt Josephsona [18], utworzono kondensat molekularny oraz kondensat par Coopera [19]. Obecne metody doświadczalne dają możliwości wszechstronnego manipulowania kondensatem. Na przykład: dzięki rezonansom Feshbacha [20] można w szerokim zakresie kontrolować siłę oddziaływań między atomami, a umieszczenie kondensatu w sieciach optycznych pozwala na badanie zjawisk będących wcześniej domeną fizyki ciała stałego, jak na przykład przejścia Motta pomiędzy metalem a izolatorem [21].

O ile kondensat ze względu na skomplikowany proces otrzymywania i niezbyt długie czasy życia ma małe zastosowanie praktyczne i przemysłowe, to ze względu na swoje własności jest uniwersalnym narzędziem badawczym, które może pomóc w zrozumieniu wielu procesów zachodzących w układzie wielu ciał, co ma duże znaczenie dla wielu dziedzin fizyki. Zrozumienie i opis wyników doświadczeń nad kondensatem Bosego-Einsteina przyczynia się do rozwoju metod fizyki teoretycznej. Opis zjawisk zachodzących w kondensacie oparty jest na mechanice kwantowej. Wyniki eksperymentów pozwalają zweryfikować zastosowanie metod symulacji układów kwantowych złożonych z wielu ciał.

Rozdział 3

Teoretyczny opis kondensatu

Teoretyczne podstawy opisu kondensatu Bosego-Einsteina w temperaturze bliskiej zera są dobrze znane - opisuje je metoda Bogoliubowa [22]. O wiele trudniejszym zadaniem jest opis kondensatu Bosego-Einsteina w temperaturze większej od zera. Istnieje wiele różnych podejść do tego problemu. Jedną z nich jest metoda pól klasycznych [1], która została użyta do symulacji składających się na tę pracę doktorską.

W tym rozdziale opiszę metodę stosowaną w mojej pracy oraz przedstawię główne idee metody Bogoliubowa, której naturalnym rozwinięciem jest metoda pól klasycznych.

3.1 Kondensat Bosego-Einsteina - definicja Penrose'a i Onsagera

Definicja kondensatu Bosego-Einsteina dla N oddziałujących atomów według Penrose'a i Onsagera [23] oparta jest na własnościach jednoczątkowej macierzy gęstości $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$:

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \rangle, \quad (3.1)$$

gdzie $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ oraz $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ są odpowiednio operatorami kreacji i anihilacji cząstki w danym punkcie przestrzeni, a oznaczenie $\langle \dots \rangle$ określa średnią po zespole statystycznym.

Operatory te spełniają bozonowe reguły komutacyjne:

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.2)$$

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}(\mathbf{r}')] = 0. \quad (3.3)$$

Jednocząstkowa macierz gęstości jest hermitowską, dodatnio określoną macierzą i może być zdiagonalizowana. Macierz gęstości w postaci diagonalnej wygląda następująco:

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_i n_i \phi_i^*(\mathbf{r}) \phi_i(\mathbf{r}'), \quad (3.4)$$

gdzie n_i są rzeczywistymi wartościami własnymi, spełniającymi warunek normalizacji:

$$\sum_i n_i = N, \quad (3.5)$$

a $\phi_i(\mathbf{r})$ są ortonormalnymi funkcjami stanowiącymi bazę w przestrzeni jednocząstkowej. Wartości n_i opisują obsadzenie poszczególnych stanów (liczbę cząstek w danym stanie) $\phi_i(\mathbf{r})$. Przyjmuje się, że w układzie znajduje się kondensat, jeżeli jedna z wartości własnych jednocząstkowej macierzy gęstości, np. wartość n_0 jest duża w porównaniu z innymi wartościami. Wtedy $\phi_0(\mathbf{r})$ odpowiada funkcji falowej kondensatu Bosego-Einsteina, n_0 jest liczbą cząstek znajdujących się w kondensacie.

3.2 Metoda Bogoliubowa - opis kondensatu w temperaturze bliskiej zera bezwzględnego

Metoda Bogoliubowa służy do opisu kondensatu Bosego-Einsteina w temperaturze bliskiej zera bezwzględnego. W swojej pracy badałam tylko układy w temperaturze większej od zera korzystając z metody pól klasycznych. W tym rozdziale przedstawię główne założenia metody Bogoliubowa, gdyż metoda pól klasycznych jest jej naturalnym rozszerzeniem.

W języku drugiej kwantyzacji hamiltonian oddziałującego gazu bozonowego dany jest następującym wzorem:

$$H = \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) H_0 \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}), \quad (3.6)$$

gdzie $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ i $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ to odpowiednio operatory kreacji i anihilacji pola bozonowego a $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ wyznacza potencjał oddziaływania między dwoma atomami. Niech hamiltonian H_0 opisuje układ nieoddziałujący:

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r}, t), \quad (3.7)$$

gdzie $\hbar$ to stała Plancka, m masa atomu, a $V(\mathbf{r}, t)$ jest potencjałem zewnętrznym, w ogólności zależnym od czasu. W przypadku kondensatu Bosego-Einsteina mamy do czynienia z układem, w którym gaz atomowy jest schłodzony do bardzo niskich temperatur i bardzo rozrzedzony. Typowa temperatura kondensatu jest rzędu dziesiątek nanokelwinów, a typowe gęstości atomów w pułapkach wahają się od 10^{12} do 10^{15} atomów na centymetr sześcienny. Ze względu na niską gęstość atomów w układzie, w opisie kondensatu Bosego-Einsteina uwzględniamy tylko procesy dwuciałowe. W przypadku bardzo zimnych i rozrzedzonych gazów istotną rolę grają tylko zderzenia centralne, które nie zależą od szczegółów potencjału oddziaływania, gdyż fala de Broglie'a związana z atomami jest tak rozmyta, że atom „nie czuje” szczegółów potencjału oddziaływania. Centralne zderzenia opisywane są pojedynczym parametrem, długością rozpraszania w fali s oznaczanym symbolem a_s . Warunkiem stosowania przybliżenia krótkozasięgowego potencjału jest mała gęstość atomów, co znaczy, że średnia liczba atomów w objętości rozpraszania musi być niewielka – $\bar{n}|a_s|^3 \ll 1$. W przypadku typowego kondensatu Bosego-Einsteina ten warunek jest spełniony. Dodatkowo, w niskich temperaturach, długość fali de Broglie'a jest bardzo duża - rzędu rozmiarów całego układu i potencjał oddziaływania może być przybliżony, przez potencjał zeroowego zasięgu:

$$U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.8)$$

gdzie $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$ jest stałą sprzężenia. Dla dodatnich wartości a_s potencjał „efektywnie” działa jak oddziaływanie odpychające, a dla ujemnych wartości a_s jak oddziaływanie przyciągające.

W zerowej temperaturze wszystkie cząstki w układzie znajdują się w stanie podstawowym. Główna idea metody Bogoliubowa opiera się na zastąpieniu operatorów anihilacji i kreacji cząstek w kondensacie przez zespoloną amplitudę. Prowadzi to do

opisu układu w ramach przybliżenia średniego pola. W tym przybliżeniu operator pola bozonowego $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ zostaje zapisany w następującej postaci:

$$\hat{\Psi} = \Phi(\mathbf{r}) + \delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \quad (3.9)$$

gdzie $\Phi(\mathbf{r})$ jest zespoloną funkcją opisującą kondensat, a $\delta\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ jest „niewielką” częścią operatorową opisującą nieskondensowane atomy. W przypadku temperatur bliskich zera bezwzględnej zakładamy, że znaczna większość atomów znajduje się w kondensacie i część operatorową traktujemy jako zaburzenie.

Po opuszczeniu wyrazów operatorowych, równanie Heisenberga ($i\hbar\partial_t\hat{\Psi} = [\hat{\Psi}, \hat{H}]$) wyznacza ewolucję czasową kondensatu. Funkcja falowa kondensatu spełnia nieliniowe równanie Schrödingera, zwane równaniem Grossa-Pitajewskiego:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) + gN|\Phi(\mathbf{r}, t)|^2\right)\Phi(\mathbf{r}, t). \quad (3.10)$$

Stacjonarne rozwiązanie równania (3.10) dane jest wzorem:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_0(\mathbf{r})\exp\left(\frac{-i\mu t}{\hbar}\right), \quad (3.11)$$

gdzie μ jest potencjałem chemicznym. Po podstawieniu rozwiązania (3.11) do równania Grossa-Pitajewskiego (3.10) dostajemy następujące równanie:

$$\mu\Phi_0(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) + gN|\Phi_0(\mathbf{r}, t)|^2\right)\Phi_0(\mathbf{r}). \quad (3.12)$$

Gdy energia oddziaływania jest znacznie większa niż energia kinetyczna, można zastosować przybliżenie Thomasa-Fermiego i zaniedbać człon z energią kinetyczną. Stąd dostajemy wzór na postać profilu gęstości kondensatu:

$$|\Phi_0(\mathbf{r}, t)|^2 = \frac{\mu - V(\mathbf{r}, t)}{gN}, \quad (3.13)$$

w obszarze, gdzie prawa strona przyjmuje wartości dodatnie. W pozostałym obszarze $|\Phi_0(\mathbf{r})|^2 = 0$. W przypadku jednorodnego gazu w pudełku z periodycznymi warunkami brzegowymi potencjał chemiczny układu jest równy:

$$\mu = gN|\Phi_0(\mathbf{r})|^2 = \frac{gN}{V}, \quad (3.14)$$

a funkcja falowa kondensatu przyjmuje następującą postać:

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{1}{V}}, \quad (3.15)$$

gdzie V jest objętością pudełka. W kolejnym przybliżeniu rozkładamy część operatorową wzoru (3.9) w bazie fal płaskich:

$$\delta\hat{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k}}, \quad (3.16)$$

gdzie $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ jest operatorem kreacji cząstki o pędzie $\hbar\mathbf{k}$. Operatory te spełniają bozonowe reguły komutacyjne:

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}'}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (3.17)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}] = 0. \quad (3.18)$$

Ze względu na periodyczne warunki brzegowe w pudełku wektor falowy dany jest następującym wzorem:

$$\mathbf{k} = \left(\frac{2\pi n_x}{L_x}, \frac{2\pi n_y}{L_y}, \frac{2\pi n_z}{L_z} \right) \quad (3.19)$$

W pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń (w hamiltonianie uwzględniamy tylko wyrazy kwadratowe w $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ i $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$) z równania Heisenberga dostajemy równania na operatory $\hat{a}_{\mathbf{k}}$:

$$i\hbar\dot{\hat{a}}_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{gN}{V}\hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{gN}{V}\hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger. \quad (3.20)$$

Przekształcamy te równania zgodnie z kanoniczną transformacją Bogoliubowa:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}}e^{-i\epsilon_{\mathbf{k}}t/\hbar} + v_{-\mathbf{k}}^*\hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger e^{i\epsilon_{\mathbf{k}}t/\hbar}, \quad (3.21)$$

gdzie $u_{\mathbf{k}}$ i $v_{\mathbf{k}}$ są pewnymi funkcjami skalarnymi, $\epsilon_{\mathbf{k}}$ jest energią elementarnego wzbudzenia. Operatory $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ spełniają bozonowe reguły komutacyjne jeśli spełniony jest warunek:

$$|u_{\mathbf{k}}|^2 - |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1. \quad (3.22)$$

Operatory $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ i $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$ są wtedy odpowiednio operatorami anihilacji i kreacji kwazicząstek Bogoliubowa. Po podstawieniu operatorów do równania (3.20) otrzymuje się następujące wyrażenie Bogoliubowa na energie wzbudzeń:

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \left[\left(\frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m} + \frac{gN}{V} \right)^2 - \left(\frac{gN}{V} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.23)$$

Dla małych wartości $\mathbf{k}$ energia wzbudzeń kwazicząstek jest liniową funkcją pędu. Liniowa relacja dyspersyjna, zgodnie z kryterium Landaua, prowadzi do nadciekłości układu. Dla dużych $\mathbf{k}$ energia kwazicząstek jest kwadratową funkcją pędu, tak jak w przypadku cząstek swobodnych. Moduły funkcji $u_{\mathbf{k}}$ i $v_{\mathbf{k}}$ są jednoznacznie określone przez warunek normalizacyjny (3.22) i równania ruchu powstałe przez podstawienie wzoru (3.21) do wzoru (3.20):

$$|u_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + \frac{gN}{V}} + 1 \right), \quad (3.24)$$

$$|v_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + \frac{gN}{V}} - 1 \right). \quad (3.25)$$

Wartości funkcji $u_{\mathbf{k}}$ i $v_{\mathbf{k}}$ znane są tylko z dokładnością do fazy. W ten sposób metoda Bogoliubowa pozwala na wyznaczenie funkcji falowej kondensatu oraz widma wzbudzeń.

3.3 Metoda pól klasycznych

Metoda pól klasycznych jest rozwinięciem idei Bogoliubowa na przypadek temperatur większych od zera. W tym wypadku nie tylko stan podstawowy jest makroskopowo obsadzony, istotne obsadzenie mają również stany o wyższych energiach. Głównym założeniem metody pól klasycznych jest zastąpienie wszystkich operatorów kreacji i anihilacji odpowiadających jednocząstkowym stanom o makroskopowych obsadzeniach, c -liczbowymi amplitudami i zaniechanie wszystkich stanów, których obsadzenie jest małe (zwykle jest to niewielka frakcja atomów o wysokich energiach), jak pokazano poniżej:

$$\hat{\Psi} = \sum_i \psi_i \hat{a}_i \rightarrow \Psi = \sum_{i=0}^{i_{max}} \psi_i a_i, \quad (3.26)$$

gdzie a_i to c -liczbowe amplitudy. Wszystkie stany o $i > i_{max}$ zaniedbujemy, gdyż ich obsadzenie jest nieistotne.

Ten wzór można stosować dla dowolnego układu z dowolnym potencjałem pułapkującym, o ile znane są wektory własne jednocząstkowej macierzy gęstości tego układu. Metodę wygodnie jest wyjaśnić na przykładzie pudełka z periodycznymi warunkami

brzegowymi. W tym przypadku znane są funkcje własne jednocząstkowej macierzy gęstości. Rozważmy jako przykład N atomowy gaz bozonowy zamknięty w pudełku z periodycznymi warunkami brzegowymi. W języku drugiej kwantyzacji układ opisany jest hamiltonianem (3.6) a operatory kreacji i anihilacji pola spełniają bozonowe reguły komutacyjne (3.2,3.3). Równanie Heisenberga przyjmuje następującą postać:

$$i\hbar\partial_t\Psi(\hat{\mathbf{r}},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\hat{\mathbf{r}},t) + gN\Psi(\hat{\mathbf{r}},t)^\dagger\Psi(\hat{\mathbf{r}},t)\Psi(\hat{\mathbf{r}},t). \quad (3.27)$$

W pudełku z periodycznymi warunkami brzegowymi naturalną bazę stanowią fale płaskie. Operator pola bozonowego rozłożony w tej bazie wygląda następująco:

$$\Psi(\hat{\mathbf{r}},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k}}(t), \quad (3.28)$$

gdzie $\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)$ jest operatorem anihilacji cząstki o pędzie $\mathbf{k}$ i spełnia bozonowe reguły komutacyjne. Po podstawieniu do równania Heisenberga (3.27) otrzymujemy nieskończony układ nieliniowych równań na operatory anihilacji cząstek o danym pędzie:

$$\partial_t\hat{a}_{\mathbf{k}}(t) = -\frac{i\hbar\mathbf{k}^2}{2m}\hat{a}_{\mathbf{k}}(t) - \frac{igN}{V} \sum_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger(t)\hat{a}_{\mathbf{q}'}(t)\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{q}'}(t) \quad (3.29)$$

Pełne rozwiązanie tego problemu jest nie znane. Aby go rozwiązać stosujemy metodę pól klasycznych - zastępujemy operatory anihilacji wszystkich modów, których obsadzenie jest makroskopowe przez liczby zespolone:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} \rightarrow \sqrt{N}a_{\mathbf{k}}. \quad (3.30)$$

Kwadrat modułu amplitudy modu $|a_{\mathbf{k}}|^2$ daje względne obsadzenie modu o pędzie $\mathbf{k}$. Zgodnie z ideą metody, w obliczeniach ograniczamy się tylko do pewnej liczby modów. Liczbę modów, które bierzemy pod uwagę w symulacjach wyznacza nam siatka, na której rozwiązujemy numerycznie równanie. Krok przestrzenny siatki Δ_r wyznacza maksymalny pęd dostępny w układzie:

$$k_{max} = \frac{\pi}{\Delta_r}. \quad (3.31)$$

Maksymalny pęd wyznaczony przez Δ_r nazywamy pędem obcięcia. W przypadku układu jednorodnego liczba punktów siatki jest równa liczbie fal płaskich, które uwzględniamy w ewolucji układu. Po podstawieniu klasycznych amplitud i opuszczeniu części operatorowej otrzymujemy skończoną liczbę równań opisujących ewolucję czasową

układu:

$$\partial_t a_{\mathbf{k}}(t) = -\frac{i\hbar \mathbf{k}^2}{2m} a_{\mathbf{k}}(t) - \frac{igN}{V} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} a_{\mathbf{q}}^*(t) a_{\mathbf{q}'}(t) a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{q}'}(t) \quad (3.32)$$

Możemy zwinąć powyższy układ równań podstawiając do wzoru następującą funkcję falową pola średniego:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (3.33)$$

Po takim podstawieniu, ewolucję funkcji $\Psi(\mathbf{r}, t)$ opisuje równanie Grossa-Pitaiewskiego:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) + gN |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.34)$$

Ważną cechą tego równania jest to, że ewolucja dowolnego stanu o danych parametrach: wielkości siatki, długości rozpraszania i wielkości pudełka, prowadzi układ do stanu równowagi termodynamicznej. W odróżnieniu od metody Bogoliubowa, w metodzie pól klasycznych funkcja falowa Ψ opisuje zarówno kondensat jak i chmurę termiczną. Aby rozdzielić kondensat i mody wzbudzone posługujemy się kryterium Penrose'a i Onsagera. Identyfikujemy kondensat jako stan odpowiadający największej wartości własnej jednocząstkowej macierzy gęstości:

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Psi(\mathbf{r})^* \Psi(\mathbf{r}'), \quad (3.35)$$

Aby rozdzielić kondensat i chmurę termiczną uśredniamy po czasie jednocząstkową macierz gęstości:

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \psi_i^*(\mathbf{r}_1, \tau) \psi_i(\mathbf{r}_2, \tau) d\tau. \quad (3.36)$$

Uśrednianie macierzy gęstości niszczy koherencję między modami własnymi i przeprowadza klasyczne pole ze stanu czystego w stan mieszany. Po diagonalizacji macierzy gęstości otrzymujemy:

$$\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_i^{i_{max}} n_i \phi_i^*(\mathbf{r}_1) \phi_i(\mathbf{r}_2), \quad (3.37)$$

gdzie $\phi_i(\mathbf{r})$ są jednocząstkowymi orbitalami a n_i ich względnymi obsadzeniami. Stan o największym względnym obsadzeniu jest kondensatem, a pozostałe stany tworzą chmurę termiczną.

Proces uśredniania macierzy gęstości odpowiada fizycznemu pomiarowi, polegającemu na robieniu zdjęcia chmury atomów - kamera ma skończony czas wykonywania

zdjęcia (rzędu milisekund) oraz skończoną rozdzielczość przestrzenną (piksele kamery mają wielkości rzędu mikrometrów). W przypadku jednorodnego układu z periodycznymi warunkami brzegowymi analiza macierzy gęstości jest bardzo prosta. Stanami własnymi jednocząstkowej, uśrednionej po czasie macierzy gęstości są fale płaskie a ich obsadzenia to uśrednione po czasie kwadraty modułów amplitud poszczególnych modów $n_{\mathbf{k}} = \langle |a_{\mathbf{k}}(t)|^2 \rangle$.

Energie poszczególnych modów wyznacza wzór podobny do wzoru Bogoliubowa (3.23):

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \left[\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + \frac{gN_0}{V} \right)^2 - \left(\frac{gN_0}{V} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.38)$$

gdzie N_0 to liczba atomów znajdujących się w kondensacie.

Metoda pól klasycznych wprowadza kolejny parametr opisujący układ, oprócz energii i geometrii układu. Jest nim pęd obcięcia k_{max} . Parametr ten wyznaczony jest przez rozmiar układu oraz liczbę punktów siatki, które określają krok przestrzenny. Stąd, na podstawie przyjętego kroku przestrzennego wyznaczamy k_{max} (wzór (3.31)). Liczba stanów uwzględnionych w ewolucji, a co za tym idzie, liczba punktów siatki bezpośrednio mówi o liczbie cząstek w układzie. Należy zaznaczyć, że w równaniu występuje parametr gN , który jest iloczynem liczby atomów N i siły sprzężenia g . Wielkości g i N nie występują w równaniu Grossa-Pitajewskiego niezależnie. To, jaka dokładnie jest siła sprzężenia i ile jest cząstek w układzie możemy ustalić dopiero po wygenerowaniu stanu. Główną ideą metody pól klasycznych jest uwzględnienie w obliczeniach tylko stanów, których obsadzenie jest makroskopowe. W przypadku pudełka z periodycznymi warunkami brzegowymi jest to łatwe, gdyż znamy stany własne takiego układu - są to fale płaskie. W przypadku gdy układ nie ma takiej symetrii powinno się korzystać ze stanów własnych odpowiedniej macierzy gęstości. Często wyliczenie tych stanów jest skomplikowane. Pokazano, że dobre wyniki daje obliczenia prowadzone w bazie składającej się z pewnej liczby fal płaskich. Jeżeli przyjęty zestaw fal płaskich dobrze oddaje stany własne układu, wyniki są dokładne. Jedyna różnica polega na tym, że część nieklasyczna (stany o znikomym obsadzeniu) ma niewielkie niezerowe rzuty na wybraną bazę fal płaskich, dlatego kilka stanów o najmniejszych wartościach wła-

snych odrzucamy w końcowej analizie. Algorytm opisu kondensatu Bosego-Einsteina w metodzie pól klasycznych wygląda następująco:

- tworzymy stan równowagowy, o danej energii, w układzie o zadanej geometrii;
- diagonalizujemy uśrednioną jednocząstkową macierz gęstości i otrzymujemy wartości własne;
- znajdujemy ostatni klasyczny stan w układzie (stan, którego obsadzenie jest odpowiednio duże);
- zakładając, że obsadzenie ostatniego stanu ma być makroskopowe, czyli musi się w nim znajdować pewna liczba cząstek $N_{k_{max}}$, możemy napisać następującą proporcję:

$$Nn_{k_{max}} = N_{k_{max}}, \quad (3.39)$$

gdzie $n_{k_{max}}$ jest wartością własną odpowiadającą ostatniemu klasycznemu stanowi (stanowi, który ma istotne obsadzenie), czyli względnym obsadzeniem tego stanu.

Dobranie odpowiedniego pędu obcięcia k_{max} i co za tym idzie pokazanie, jakie jest minimalne dopuszczalne obsadzenie stanu, aby mógł być uznany za klasyczny jest skomplikowanym zagadnieniem. Jest wiele podejść do tego problemu. W tej pracy omówię jedno opisane w pracach grupy warszawsko-białostockiej [29, 30].

Wyznaczenie pędu obcięcia zależy od temperatury, stanu jaki badamy oraz geometrii układu. W pracy [29] autorzy dobierają pęd obcięcia tak, aby temperatura krytyczna wyliczona za pomocą metody pól klasycznych zgadzała się z temperaturą krytyczną nieoddziałującego gazu bozonowego dla danej pułapki. Opierają się tu na założeniu, że temperatura krytyczna słabo zależy od siły oddziaływań między atomami i jest bliska tej dla gazu nieoddziałującego (dla typowego przypadku gazu bozonowego różnica wynosi około 5%). Autorzy pokazują, że dla przypadku trójwymiarowego pudełka z okresowymi warunkami brzegowymi, optymalne obsadzenie ostatniego stanu klasycznego powinno wynosić około $N_{k_{max}} = 0.7$ cząstki. W kolejnej pracy [30] autorzy pokazali, że w rozkładzie kanonicznym, w metodzie pól klasycznych można tak dobrać

pęd obciążenia, żeby wyniki zgadzały się z kwantowym opisem kondensatu w niezerowej temperaturze dla gazu nieoddziałującego. Obliczenia zostały przeprowadzone dla różnych temperatur i różnych geometrii układu. W przypadku jednowymiarowej pułapki harmoniczej bazę oscylatorową należy ograniczyć do stanów o liczbie kwantowej nie większej niż:

$$n_{max} = \frac{1}{\hbar\omega\beta}, \quad (3.40)$$

gdzie n_{max} jest główną liczbą kwantową, ω jest częstością pułapki harmoniczej, $\beta = 1/k_B T$, k_B jest stałą Boltzmana a T to temperatura. W przypadku dwu- i trójwymiarowych układów opis jest bardziej skomplikowany, gdyż dochodzi degeneracja stanów. W przypadku większej liczby wymiarów wzór na pęd odciążenia wygląda następująco:

$$\hbar\omega n_{max}\beta = [\zeta(D)(D-1)(D-1)!]^{1/(D-1)}, \quad (3.41)$$

gdzie D jest wymiarowością układu a $\zeta(D)$ jest funkcją zeta Riemana. Powyższy wzór zależy tylko od temperatury i geometrii układu. Mając wzór na n_{max} wiadomo ile funkcji oscylatorowych należy uwzględnić w obliczeniach. Mając daną wartość n_{max} można również policzyć ile cząstek znajduje się w modzie o tym pędzie. Stosując powyższą metodę pokazano, że dla optymalnego wyboru bazy, w przypadku trójwymiarowej pułapki harmoniczej liczba cząstek w ostatnim modzie wynosi około: $N_{n_{max}} = 0.48$. Wielkość ta praktycznie nie zmienia się z temperaturą w zakresie temperatur $(0, T_c)$, gdzie T_c to temperatura krytyczna. Analogiczne obliczenia zostały przeprowadzone dla pudełka z okresowymi warunkami brzegowymi. W przypadku trójwymiarowego pudełka wzór na pęd obciążenia wygląda w następująco:

$$\frac{\beta\hbar^2\mathbf{k}_{max}^2}{2m} = \pi \left[\frac{\zeta(3/2)}{4} \right]. \quad (3.42)$$

Wartości parametru $\beta\hbar^2|\mathbf{k}_{max}|/2m$ wynoszą odpowiednio dla jedno-, dwu i trójwymiarowego układu 0.29, 0.68, 1.34. W przypadku trójwymiarowym odpowiada to obsadzeniu ostatniego stanu klasycznego $N_{\mathbf{k}_{max}} = 0.75$ cząstki na mod, wielkość ta jest praktycznie stała dla temperatur z przedziału od 0 do $0.5T_c$, dla wyższych wartości T jest trochę mniejsza. Wartość ta zgadza się z wynikami przedstawionymi w pracy [29].

3.4 Inne metody opisu BEC w temperaturze większej od zera bezwzględnego

Istnieje kilka innych podejść do opisu kondensatu w skończonej temperaturze. W tym podrozdziale opiszemy krótko kilka innych metod.

Równolegle z pracą [1] ukazała się praca grupy oxfordzkiej [31], w której proponowano metodę opisu kondensatu w temperaturze większej od zera bezwzględnego. Metoda ta różni się od metody pól klasycznych jedynie drobnymi szczegółami w implementacji numerycznej. W szczególności autorzy używają innej techniki do wyznaczenia temperatury układu. Aby ograniczyć dynamikę jedynie do klasycznych modów pola, w każdym kroku symulacji stosowana jest technika rzutowania pola atomowego na arbitralnie wybrane mody. Metoda ta, znana jest pod nazwą „Projected Gross-Pitaewski equation”.

Metoda grupy francuskiej [32] opiera się na opisie skondensowanego gazu za pomocą Wignerowskiej reprezentacji N -cząstkowego operatora gęstości. Jest ona de facto odmianą metody pól klasycznych dla przypadku kanonicznego opisu kondensatu: kondensat Bosego-Einsteina znajduje się w równowadze termodynamicznej ze zbiornikiem cieplnym.

Istnieje również metoda kanadyjsko-japońska [33]. W tej metodzie układ podzielony jest na dwa składniki: kondensat, którego ewolucję opisuje równanie Grossa-Pitajewskiego, oraz chmurę termiczną opisaną za pomocą funkcji rozkładu w przestrzeni fazowej. Równania opisujące dynamikę kondensatu i chmury termicznej są ze sobą sprzężone przez człon umożliwiający wymianę atomów między składnikami. Największym sukcesem tej metody był opis zależności częstości drgań własnych kondensatu i chmury termicznej od temperatury układu [34].

Wszystkie wspomniane wyżej metody skupiają się na opisie przypadków stacjonarnych. W swojej rozprawie doktorskiej pokazałam, że metoda pól klasycznych daje dobre wyniki również w przypadku układów dynamicznych.

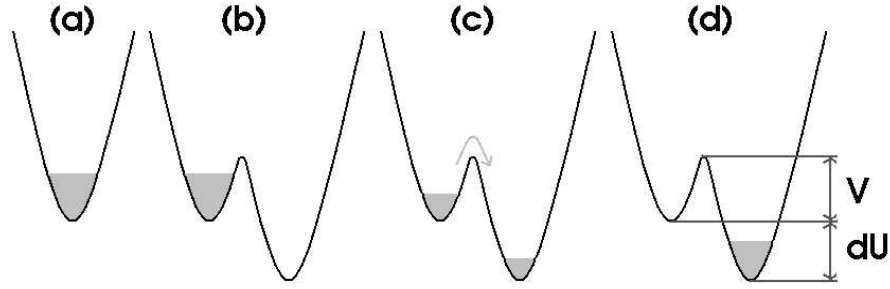
Rozdział 4

Kwantowa destylacja kondensatu Bosego-Einsteina – wyniki numeryczne

4.1 Wstęp

W tym rozdziale przedstawię wyniki numeryczne dotyczące kwantowej destylacji kondensatu Bosego-Einsteina. W układzie, w którym znajduje się pojedynczy kondensat zostało wytworzone nowe minimum, oddzielone od starej studni barierą. Wysokość i grubość bariery została dobrana w taki sposób, aby atomy z kondensatu nie mogły bezpośrednio przepłynąć do nowej studni. Również prawdopodobieństwo tunelowania atomów przez barierę jest bardzo małe. W tym rozdziale pokażę w jaki sposób układ dowiadyuje się o nowym stanie podstawowym i jaki jest mechanizm przepływu cząstek do nowego minimum.

Symulacje numeryczne zainspirowane zostały doświadczeniem [35] wykonanym w laboratoriach MIT przez grupę Wolfganga Ketterlego.



Rysunek 4.1: Schemat destylacji kondensatu Bosego-Einsteina w podwójnej studni potencjału. (a) Kondensat został umieszczony w pojedynczej pułapce optycznej. (b) Następnie pułapka została przekształcona: utworzono nowe minimum i obniżyła się bariera między studniami. (c) Atomy przemieszczają się do prawej studni. (d) Stan końcowy, kondensat znajduje się w prawej studni. Potencjał opisany jest następującymi parametrami: dU - różnica głębokości między studniami oraz V_b - wysokość bariery pomiędzy studniami, liczona od dna lewej studni.

4.1.1 Doświadczenie

Schemat doświadczenia [35] przedstawia rysunek 4.1. W pułapce magnetycznej został wytworzony kondensat składający się z atomów sodu ^{23}Na w stanie $|F = 1, m_F = 1\rangle$. Następnie atomy przeniesiono do pułapki optycznej (rysunek 4.1a). Głębokość pojedynczej pułapki wynosiła $U = k_B \times 2400nK$ a jej częstotliwości radialna i osiowa, odpowiednio $830Hz$ i $12.4Hz$. Potencjał chemiczny kondensatu wynosił $\mu = k_B \times 300nK$. Liczba atomów skondensowanych wynosiła $N_0 = 1.1 \times 10^6$. Ponieważ w doświadczeniach trudno dokładnie określić liczbę skondensowanych atomów przyjmuję, że w kondensacie znajdowało się od 90% do 100% atomów. Następnie potencjał pułapkujący został adiabaticznie przekształcony i wytworzono w nim nowe minimum w postaci prawej studni (rysunek 4.1b). Nowy potencjał charakteryzują następujące wielkości: V_b - wysokość bariery mierzona od dna lewej studni, dU - głębokość prawej studni oraz $d = 15.9\mu m$ - odległość między studniami (rysunek 4.1d). Potencjał chemiczny jest mniejszy od wysokości bariery. Dodatkowo parametry pułapki zostały dobrane tak, aby prawdopodobieństwo tunelowania było zanedbywalne.

Podczas ewolucji zaobserwowano przeniesienie kondensatu z lewej studni i pojawie-

nie się go w prawej studni. Kondensat zaczął pojawiać się w prawej studni po czasie około 0.4sek . Po czasie 3.5sek w prawej studni znajdowało się ok. 50% atomów. W lewej studni pozostała bardzo niewielka frakcja kondensatu (rzędu 4000 atomów) czyli układ jeszcze nie osiągnął stanu równowagi. Autorzy badali liczbę atomów skondensowanych w prawej i lewej studni oraz temperaturę w obu studniach w funkcji czasu. Ponieważ układ w czasie ewolucji nie jest w stanie równowagi, jako temperaturę przyjęto stosunek liczby atomów skondensowanych do całkowitej liczby atomów w danej studni. Zauważono, że po skończeniu doświadczenia całkowita liczba atomów wynosiła 0.6×10^6 atomów, czyli mniej niż wynikałoby z czasu życia kondensatu (ok. 12sek). Również zmiana temperatury układu była mniejsza niż przewidywano. Prawdopodobnie związane jest to z parowaniem wysokoenergetycznych cząstek. Wyniki zostały zinterpretowane jako destylacja: kondensat w lewej studni paruje, następnie wysokoenergetyczne atomy z chmury termicznej przepływają ponad barierą i kondensują w nowej studni. Taka interpretacja implikuje całkowicie niekoherentny transfer atomów z jednej studni do drugiej.

4.2 Obliczenia numeryczne

Celem badań było teoretyczne zbadanie procesu destylacji. Aby uprościć problem, ograniczyłam się do przypadku jednowymiarowego. W modelu zachowane zostały wartości niektórych parametrów zastosowanych w eksperymencie, np: początkowa frakcja atomów skondensowanych, wysokość potencjału pułapkującego, wysokość bariery między studniami, różnica głębokości studni, potencjał chemiczny, itd. Przejście z przypadku trójwymiarowego do jednowymiarowego może wpłynąć na wyniki symulacji, dlatego wyniki symulacji nie powinny być ilościowo porównywane z wynikami eksperymentu [35]. Przypuszczam jednak, że oba przypadki są do siebie podobne a wyniki będą się różnić tylko ilościowo nie jakościowo. W obliczeniach stosowałam metodę split-operator, bazującą na rozkładzie Fourierowskim funkcji falowej. Obliczenia były przeprowadzane w ograniczonej bazie fal płaskich.

W symulacjach numerycznych wprowadzono następujące jednostki:

- jednostka długości - jako jednostkę długości przyjęto szerokość studni $a_0 = 12\mu m$;
- jako jednostkę energii przyjęto charakterystyczną energię dla prostokątnej studni, daną wzorem:

$$e_0 = \frac{\hbar^2}{ma_0^2}, \quad (4.1)$$

i w przypadku atomów sodu ^{23}Na wynoszącą $e_0 = k_B \times 0.14nK$;

- typowa jednostka czasu to:

$$t_0 = \frac{\hbar}{e_0}, \quad (4.2)$$

co dla powyższej wartości e_0 daje $t_0 = 0.05sek$.

4.3 Potencjał pułapkujący

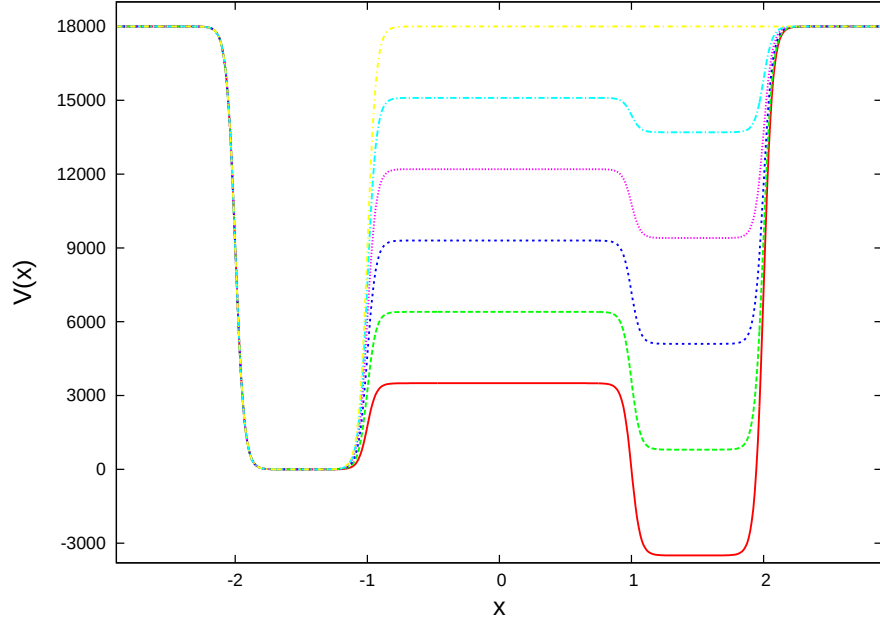
W obliczeniach numerycznych przybliżono potencjał pułapkujący przez prostokątną studnię o wygładzonych brzegach (aby uniknąć błędów numerycznych na brzegach studni). Taki kształt studni pozwala na łatwą modyfikację głębokości studni oraz wysokości bariery między studniami bez zmiany ich kształtu. Dla stanu początkowego potencjał numeryczny dany jest następującym wzorem:

$$V_{in}(x, x_1, x_2) = h[\text{tgh}(x - x_1) - \text{tgh}(x - x_2)], \quad (4.3)$$

gdzie h jest wysokością pułapki a x_1 i x_2 to położenia krawędzi lewej studni, jak pokazano na rysunku 4.2 (linia żółta). Potencjał zmienia się w czasie zgodnie ze wzorem:

$$V(x, t) = V_{in}(x, x_1, x_2) + a(t)V_{in}(x, x_3, x_4) - b(t)V_{in}(x, x_2, x_3), \quad (4.4)$$

gdzie parametr $a(t)$ steruje głębokością prawej studni, $b(t)$ odpowiada za wysokość bariery między studniami, x_3 i x_4 są położeniami krawędzi prawej studni. W trakcie transformacji potencjału oba parametry zmieniają się liniowo. Głębokość prawej studni zmienia się w czasie od wartości $18000e_0$ (brak studni, $t = 0$) do $-3500e_0$ ($t = 10t_0$). Początkowa wysokość bariery wynosiła $18000e_0$ dla czasu $t = 0$. Końcowa wysokość bariery zmieniała się w przedziale od $2600e_0$ do $3500e_0$ w zależności od symulacji. Zero energii liczone jest od dna lewej studni. We wszystkich przypadkach czas transformacji



Rysunek 4.2: Potencjał $V(x, t)$ w różnych chwilach transformacji (od góry: $0 t_0$, $2 t_0$, $4 t_0$, $6 t_0$, $8 t_0$ i $10 t_0$) w funkcji odległości. Czas transformacji potencjału wynosi $t_t = 10 t_0$. Wysokość bariery zmienia się od $18000 e_0$ do $3500 e_0$ a głębokość prawej studni zmienia się od $18000 e_0$ do $-3500 e_0$.

potencjału wynosi $t_t = 10 t_0$. Potencjał pułapkujący dla różnych chwil czasu pokazany jest na rysunku 4.2. Czas transformacji jest znacznie dłuższy niż charakterystyczny czas związany z oddziaływaniami nieliniowymi ($1/gN_{at}$).

4.4 Przybliżenia

W symulacjach zostały zrobione dwa bardzo istotne uproszczenia. Po pierwsze ograniczono geometrię układu do jednego wymiaru. W doświadczeniu obie rozdzielone barierą pułapki miały kształt cygar, których długie osie były równoległe do siebie. Transfer atomów odbywał się w kierunku prostopadłym do długiej osi. Tylko ten kierunek został uwzględniony w moich obliczeniach. Kierunek aksjalny, o stosunkowo małej energii wzbudzeń został pominięty. Po drugie założono, że pułapki mają kształt prostokątnych studni o wygładzonych brzegach. W tej części omówione zostaną konsekwencje tych uproszczeń. W dyskutowanym układzie numerycznym parametry dobrano w taki

sposób, aby prawdopodobieństwo tunelowania było bliskie zeru. Prawdopodobieństwo tunelowania jest proporcjonalne do następującego wyrażenia:

$$R = \frac{\mu}{\hbar} \exp \left[-\sqrt{\frac{2md^2(V_b - \mu)}{\hbar^2}} \right], \quad (4.5)$$

gdzie μ to potencjał chemiczny, d - szerokość bariery, V_b - wysokość bariery. Dla bariery o wysokości $V_b = 2600e_0$ czas tunelowania wynosi $t_{tun} = 1/R = 0.5 \times 10^{12}t_0$ a dla bariery $V_b = 3500e_0$ - $t_{tun} = 0.33 \times 10^{21}t_0$. Przy całkowitym czasie ewolucji równym $t_e = 10^4t_0$ wpływ tunelowania można zaniedbać. W związku z tym transfer atomów powyżej bariery może nastąpić tylko na skutek szeregu wzbudzeń poprzez stany pośrednie leżące poniżej bariery. Przy zaniedbaniu oddziaływań, poziomy wzbudzeń jednocząstkowych zależą od kształtu pułapki, np: w pułapce harmoniczej (jaka była użyta w eksperymencie [35]) poziomy energetyczne są równoodległe. Dla częstości radialnej ($f_r = 830Hz$) odległość między poziomami wynosi $\Delta E = k_B \times 36nK$ a dla częstości aksjalnej ($f_a = 12.4Hz$) - $\Delta E = k_B \times 0.6nK$. W przypadku studni prostokątnej różnica między sąsiednimi poziomami energetycznymi różni się w zależności od stanu, z którego cząstka jest wzbudzana. W przypadku prostokątnej studni, energia wzbudzenia ze stanu podstawowego wynosi $\Delta E = k_B \times 5nK$, ale energia wzbudzenia ze stanu o energii rzędu wysokości bariery ($E \sim 3500e_0$) jest znacznie większa - $\Delta E = k_B \times 70nK$. Energie wzbudzeń w prostokątnej studni są około stu razy większe niż w przypadku pułapki harmoniczej. Założono, że przez zmianę geometrii pułapki oraz usunięcie z obliczeń kierunku, w którym cząstki łatwo się wzbudzają, skale czasowe wszystkich procesów zwiększą się o dwa rzędy wielkości.

4.5 Stan początkowy

Aby odtworzyć numerycznie eksperyment [35], w pojedynczej studni potencjału (rysunek 4.2, czerwony wykres) został przygotowany stan początkowy.

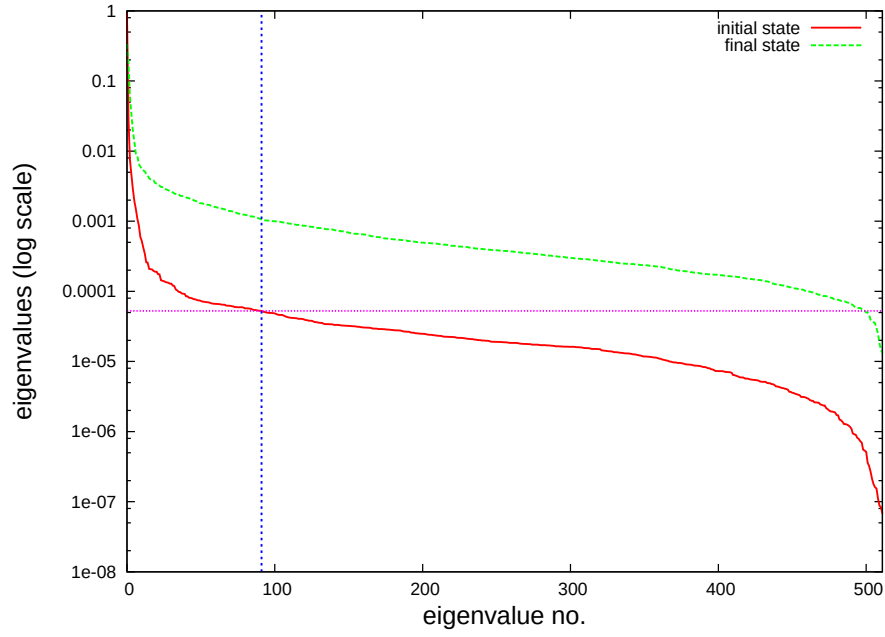
Przygotowanie stanu początkowego zaczęłam od wytworzenia stanu podstawowego dla początkowej pułapki. Stan podstawowy otrzymałam za pomocą metody czasu urojonego. Następnie stan podstawowy został zaburzony losową fazą i poddany termaliza-

cji. Jak wspomniano wcześniej, swobodna ewolucja dowolnego stanu prowadzi do stanu równowagowego. Przeprowadzanie stanu o zadanej energii do stanu równowagowego o tej samej energii nazywamy termalizacją. Aby upewnić się, że stan początkowy osiągnął równowagę termodynamiczną monitorowałam wartości własne macierzy gęstości w różnych chwilach czasu. Termalizacja kończy się, gdy wartości własne dla różnych chwil czasu fluktuują wokół pewnej stałej wartości.

Energia stanu początkowego wynosiła $1580.3e_0$ i jest o 20% większa niż energia stanu podstawowego. Stan początkowy zawiera 92% atomów skondensowanych. Pozostałe atomy znajdują się w stanach wzbudzonych i tworzą chmurę termiczną. Trudną kwestią jest wyznaczenie liczby cząstek w układzie. Idea metody pól klasycznych zakłada uwzględnienie w obliczeniach tylko tych stanów, których obsadzenie jest makroskopowe. W tym przypadku obliczenia są przeprowadzane w ograniczonej bazie fal płaskich. Wszystkie stany, których pęd był większy niż pęd obciążenia zostały zaniebane. Część nieklasycznych stanów posiada nieznikające rzuty na przestrzeń rozpiętą przez wybraną bazę fal płaskich - stąd w rozkładzie jednocząstkowej macierzy gęstości stanu równowagowego pojawiają się bardzo małe wartości własne. Liczba takich wartości jest mała w porównaniu z całkowitą liczbą funkcji bazowych i nie brałam ich pod uwagę w końcowej analizie wyników. Podsumowując, spektrum jednocząstkowej macierzy gęstości dla stanu równowagi ma następującą strukturę:

- jedna, dominująca wartość własna, równa względnemu obsadzeniu kondensatu N_0/N ;
- wiele niewielkich wartości własnych, odpowiadających obsadzeniu stanów termicznych, w sumie te stany tworzą chmurę termiczną;
- kilka bardzo małych wartości własnych odpowiadających stanom nieklasycznym, które są pominięte w analizie wyników. Obecność tych stanów wynika z użycia bazy fal płaskich zamiast prawdziwych stanów własnych jednocząstkowej macierzy gęstości.

Rysunek 4.3 (linia ciągła) pokazuje przykładowy rozkład wartości własnych. Obsadzenie kondensatu w tym stanie wynosi ok. 92%. W praktyce koniec plateau wartości



Rysunek 4.3: Względne obsadzenie modów dla stanu początkowego (czerwona, ciągła linia) i stanu po skończonej ewolucji, dla czasu $t = 10000t_0$ (zielona, przerywana linia). Pionowa linia pokazuje miejsce cut-offu dla stanu końcowego. Linia pozioma pokazuje liczbę makroskopowo obsadzonych modów dla stanu początkowego. Liczba atomów w układzie jest równa $N = 2 \times 10^4$. Wykres jest w skali logarytmicznej.

własnych wyznacza ostatni klasyczny mod i odpowiadający mu pęd obcięcia. Znając względne obsadzenie ostatniego modu klasycznego można wyznaczyć liczbę cząstek w układzie. W obliczeniach przyjąłem, że liczba cząstek w ostatnim modzie wynosi $N_{\mathbf{k}_{max}} = 1$. Jest to pewne przybliżenie, ale potencjał w rozpatrywanym układzie nie jest ani harmoniczny, ani nie jest pudełkiem z periodycznym warunkami brzegowymi. Inna wartość obcięcia odpowiadałaby układowi z inną liczbą cząstek oraz inną siłą oddziaływania między atomami. Liczbę cząstek wyznacza się ze wzoru $N = 1/n_i$, gdzie n_i jest ostatnią „klasyczną” wartością własną. Dzięki temu obsadzenie wszystkich stanów użytych w ewolucji jest makroskopowe. Poprzednie badania pokazały, że takie przyjęcie wartości pędu obcięcia daje wyniki zgodne z doświadczeniami, jak na przykład z oszacowaniem temperatury krytycznej gazu.

W przypadku obliczeń w stanie równowagi termodynamicznej liczba makroskopowo obsadzonych stanów pozostaje stała w czasie. W tym przypadku jest inaczej - stan

układu zmienia się dynamicznie. Po transformacji potencjału układ dąży do nowego stanu równowagi odpowiadającemu wyższej temperaturze niż początkowa, a liczba makroskopowo obsadzonych stanów rośnie. Są dwa sposoby uwzględnienia tej sytuacji: pierwszy to dynamiczna zmiana liczby klasycznych stanów. Ten sposób wiąże się ze zmianą liczby punktów siatki w trakcie dynamiki i jest niezwykle trudny. Drugim sposobem jest dobranie liczby stanów tak, aby odpowiadała stanom o makroskopowym obsadzeniu w chwili końcowej. W tych obliczeniach zastosowano drugie rozwiązanie. Rysunek 4.3 pokazuje względne obsadzenie modów dla stanu początkowego (czerwona, ciągła linia) i stanu po skończonej ewolucji, dla czasu $t = 10000t_0$ (zielona, przerywana linia). Numer stanu, który odpowiada ostatniemu makroskopowo obsadzonemu stanowi w chwili końcowej jest zaznaczony linią poziomą. Wszystkie stany powyżej tej linii mają makroskopowe obsadzenie (są klasyczne). Taki cut-off daje liczbę atomów w układzie równą $N_{at} = 2 \times 10^4$. Jednakże dla takiej liczby cząstek tylko pierwszych 91 modów w stanie początkowym jest makroskopowo obsadzonych (pionowa linia na rysunku 4.3). Pozostałe stany są nieklasyczne i nie stosuje się do nich metoda pól klasycznych. Zostały one uwzględnione, gdyż w późniejszej ewolucji staną się klasyczne. W tym miejscu nasuwa się pytanie czy takie przybliżenie może wpłynąć na dynamikę układu.

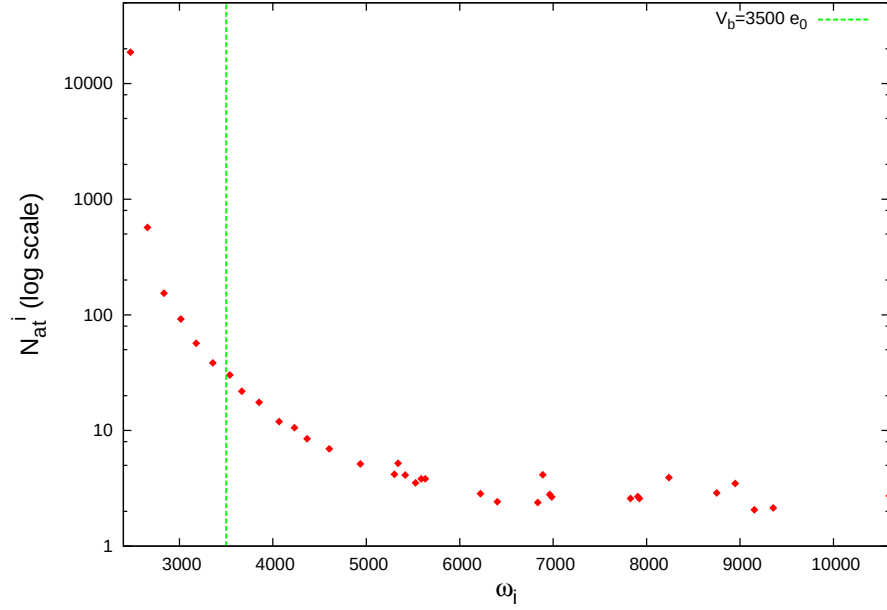
Transfer atomów do stanów o znikomym obsadzeniu zachodzi na skutek procesów spontanicznych. Te procesy nie są uwzględnione w metodzie pól klasycznych, która uwzględnia tylko procesy wymuszone. Obliczenia nie dawałyby dobrych wyników, gdyby wszystkie stany klasyczne znajdowałyby się poniżej poziomu bariery. Aby to sprawdzić, przypisałam energie stanom własnym jednocząstkowej macierzy gęstości $\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Aby to zrobić badałam charakterystyczną częstość amplitudy danego stanu:

$$a_i(t) = \int \phi_i^*(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad (4.6)$$

$$\tilde{a}_i(\omega) = \int e^{-i\omega t} a_i(t) dt, \quad (4.7)$$

gdzie $\phi_i(\mathbf{r}, t)$ jest i -tym stanem własnym jednocząstkowej macierzy gęstości, $a_i(t)$ jest amplitudą i -tego stanu, a $\tilde{a}_i(\omega)$ rozkładem spektralnym amplitudy $a_i(t)$. W przypadku jednorodnego gazu pokazano, że jednocząstkowe energie stanów policzone za pomocą

metody pól klasycznych opisane są wzorem Bogoliubowa-Popowa (3.38).

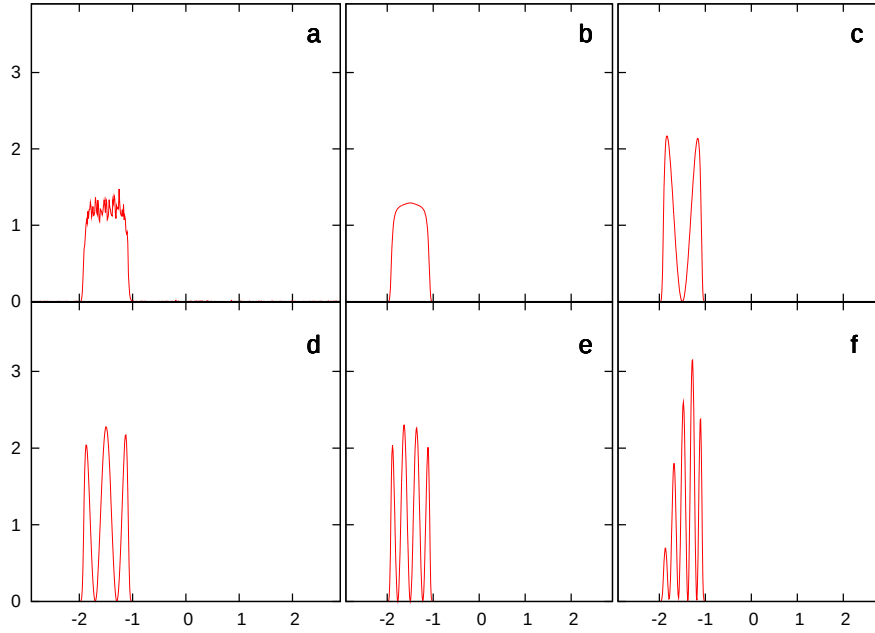


Rysunek 4.4: Liczba atomów w danym modzie w funkcji energii odpowiadającej danemu modowi dla stanu początkowego. Pionowa linia oznacza wysokość bariery pomiędzy studniami, $V_b = 3500e_0$. Całkowita liczba atomów w układzie wynosi $N = 2 \times 10^4$ atomów. Wykres jest w skali logarytmicznej.

Na rysunku 4.4 pokazane jest obsadzenie stanów o niskich energiach. Pionowa linia pokazuje poziom bariery pomiędzy studniami. Jak widać na rysunku 4.4, tylko pierwsze kilka stanów ma energie poniżej bariery. Pozostałe stany mają większe energie. Obsadzenie tych stanów jest makroskopowe, a transfer atomów do tych stanów jest zdominowany przez procesy wymuszone i dlatego opis przy pomocy klasycznych modów dobrze opisuje transport atomów do nowego minimum. Na rysunku 4.5 pokazany jest rozkład gęstości funkcji falowej oraz wybrane wektory własne jednocząstkowej macierzy gęstości dla stanu początkowego.

4.6 Wyniki

W tej części przedstawiam wyniki obliczeń numerycznych. Całkowity czas ewolucji wynosi $t_e = 10000t_0$. Podczas symulacji jednocząstkowa macierz gęstości jest

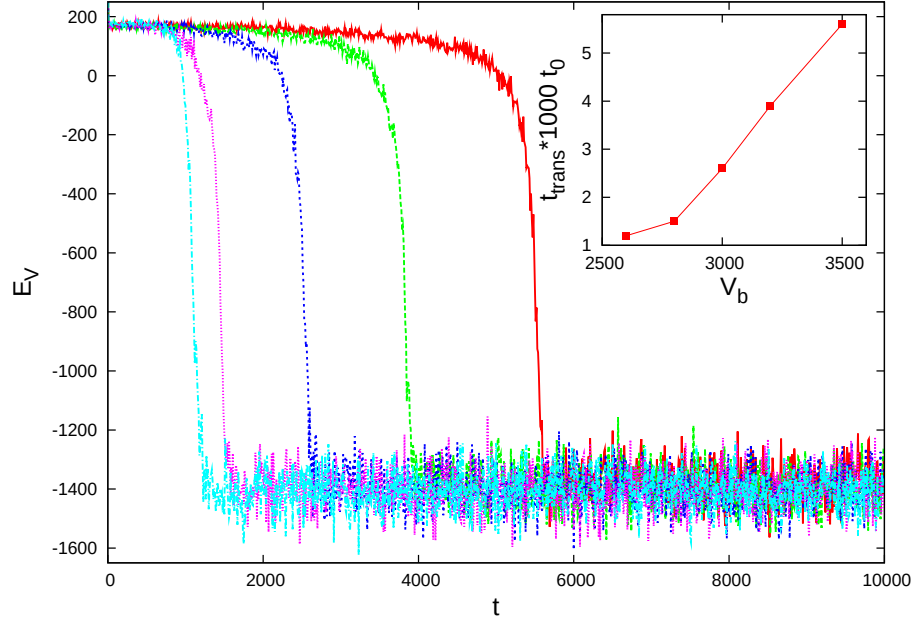


Rysunek 4.5: Rozkład gęstości funkcji falowej (a) oraz wybrane wektory własne uśrednionej macierzy gęstości (b) - (f) dla stanu początkowego w funkcji położenia. Krawędzie studni - $x_1 = -2a_0$ i $x_2 = -1a_0$. Obsadzenie stanów własnych jest następujące: $n_0 = 92.56\%$ (b), $n_1 = 3.84\%$ (c), $n_2 = 0.90\%$ (d), $n_3 = 0.53\%$ (e) i $n_4 = 0.4\%$ (f). Wszystkie wektory własne są zlokalizowane w lewej studni.

uśredniana po czasie $\Delta t = 0.1t_0$, który odpowiada 0.5 msek. Jest to czas porównywalny z czasem pomiaru. Dłuższe uśrednianie macierzy gęstości nie wpływa na wyniki. Transfer atomów do nowego minimum można obserwować na różne sposoby. Jednym ze sposobów jest monitorowanie zależności energii potencjalnej od czasu. Energia potencjalna dana jest następującym wzorem:

$$E_V = \int \Psi^*(x)V(x)\Psi(x)dx, \quad (4.8)$$

gdzie $V(x)$ jest potencjałem pułapkującym. Gdy cząstki zaczynają pojawiać się w obszarze nowego minimum energia potencjalna zaczyna spadać. Jest to związane z wartością potencjału w tym obszarze - $V(x) = -3500$. Na rysunku 4.6 pokazano wykresy energii potencjalnej układu w funkcji czasu dla różnych końcowych wysokości bariery. Nagły spadek wartości energii potencjalnej jest związany z przepływem atomów do nowego minimum. We wstawce na rysunku 4.6 pokazano czas przejścia

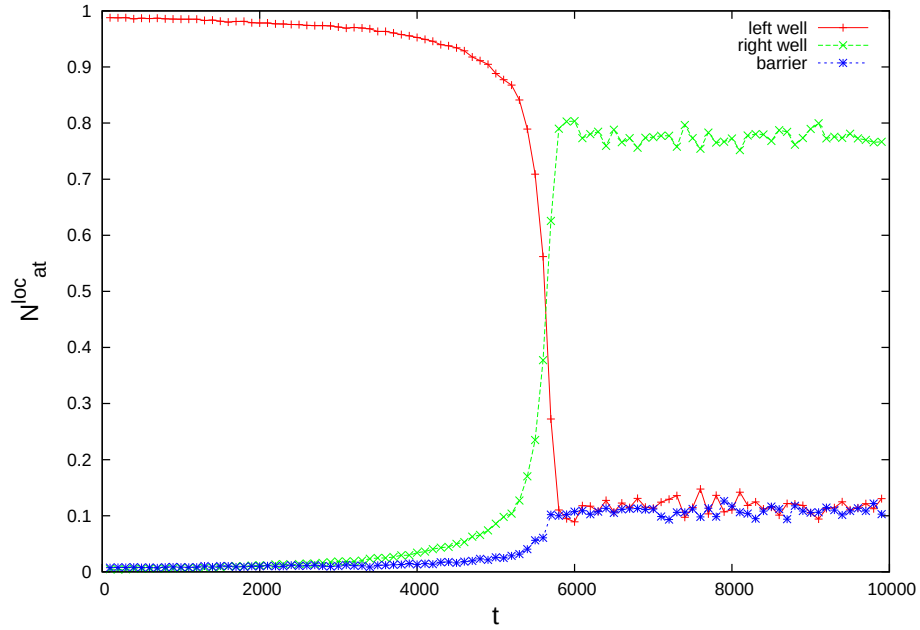


Rysunek 4.6: Energia potencjalna w funkcji czasu dla różnych końcowych wysokości bariery. Wykresy odpowiadają wysokościami bariery (od lewej): $V_b = 2600e_0$, $V_b = 2800e_0$, $V_b = 3000e_0$, $V_b = 3200e_0$ oraz $V_b = 3500e_0$. Głębokość prawej studni wynosi $dU = -3500e_0$. We wstawce czas przejścia w funkcji końcowej wysokości bariery.

dla różnych końcowych wysokości bariery. Dla badanych końcowych wysokości barier czas przejścia wzrasta liniowo wraz ze wzrostem wysokości bariery V_b . Rysunek 4.7 przedstawia zmianę procentowej liczby atomów w różnych obszarach pułapki (w obszarze prawej studni, lewej studni oraz bariery) w czasie. Liczbę atomów uwięzionych w danym obszarze można przybliżyć wzorem:

$$N_{at}^{loc} = \int_{x_i}^{x_f} \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx, \quad (4.9)$$

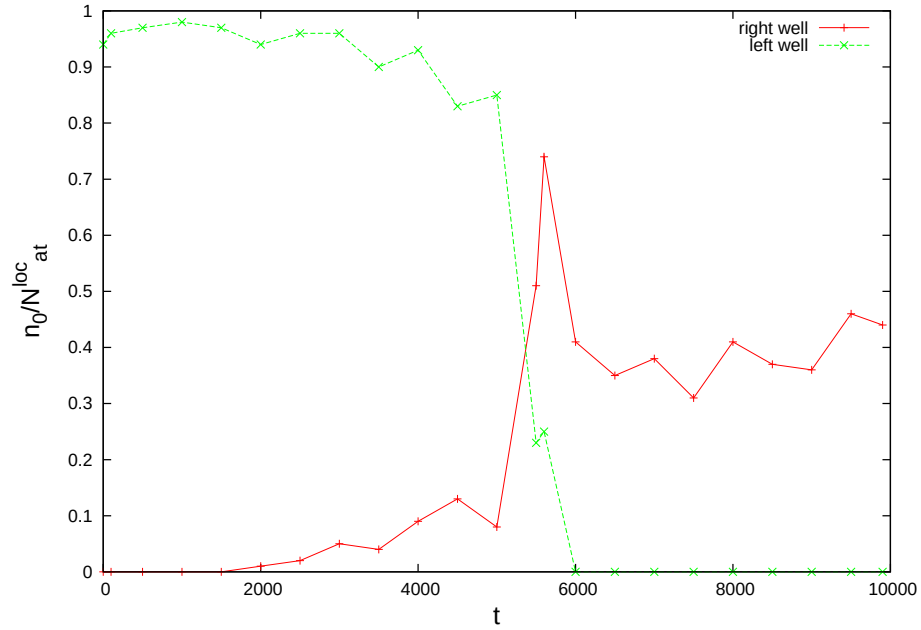
gdzie x_i i x_f to odpowiednio położenie początku i końca danego obszaru. Trzeba zaznaczyć, że ten wzór daje nieco zawyżony wynik. Brane są pod uwagę nie tylko atomy uwięzione na przykład w lewej studni ale, również te cząstki, które znajdują się powyżej bariery i mogą poruszać się w obrębie całej pułapki a akurat w tej chwili znajdowały się nad lewą studnią. Nagłemu spadkowi energii potencjalnej układu (rysunek 4.7) towarzyszy szybki przepływ atomów do obszaru nowego minimum. Zaraz po przepływie liczba atomów w lewej studni i w obszarze bariery stabilizuje się na tym samym



Rysunek 4.7: Względna liczba atomów w obszarze lewej i prawej studni oraz w obszarze bariery w funkcji czasu. Wysokość bariery wynosi $V_b = 3500e_0$ a głębokość nowej, prawej studni $dU = -3500e_0$.

poziomie. Na rysunku 4.8 pokazano frakcję kondensatu w lewej i prawej studni (obsadzenie stanu podstawowego danej studni). Liczba skondensowanych atomów w prawej i lewej studni jest znormalizowana do liczby atomów w danym obszarze. Normalizacja jest różna w obu studniach i zmienia się w czasie. Frakcja skondensowanych atomów w danej studni jest odwrotnie proporcjonalna do „temperatury” w danej studni - im większa jest frakcja kondensatu tym niższa jest „temperatura”. Z racji tego, że układ nie znajduje się w stanie równowagi, nie można wyznaczyć prawdziwej temperatury układu. Na podstawie rysunku 4.8 wyróżniamy trzy fazy ewolucji układu (rysunek 4.8 przedstawia wyniki dla układu, w którym wysokość bariery wynosi $V_b = 3500e_0$ a głębokość nowej, prawej studni $dU = -3500e_0$):

- czas $0 - 5000t_0$ - atomy są uwięzione w lewej studni i powoli się wzbudzają, liczba atomów skondensowanych zmniejsza się do ok. 80%;
- czas $5000 - 6000t_0$ - kondensat znika z lewej studni i pojawia się w prawej studni;
- czas $6000 - 10000t_0$ - układ dochodzi do stanu równowagi termodynamicznej.



Rysunek 4.8: Liczba atomów w stanie podstawowym nowego i starego minimum, normalizowana do liczby atomów w danej studni. Uwaga: $N_{at}^{loc} < N$ oraz n_0/N jest mniejsze niż n_0/N_{at}^{loc} , gdzie N to całkowita liczba cząstek w układzie a N_{at}^{loc} to liczba cząstek w danym obszarze. Wysokość bariery wynosi $V_b = 3500e_0$ a głębokość nowej, prawej studni $dU = -3500e_0$.

Poniżej opisane zostaną poszczególne etapy destylacji kondensatu. Pokazane zostanie jak kondensat znajduje nowe minimum i jaki jest mechanizm przepływu. Poniższe wyniki dotyczą przypadku, gdy końcowa wysokość bariery wynosi $V_b = 3500e_0$ a końcowa głębokość studni wynosi $dU = -3500e_0$.

4.6.1 Poszukiwanie nowego minimum

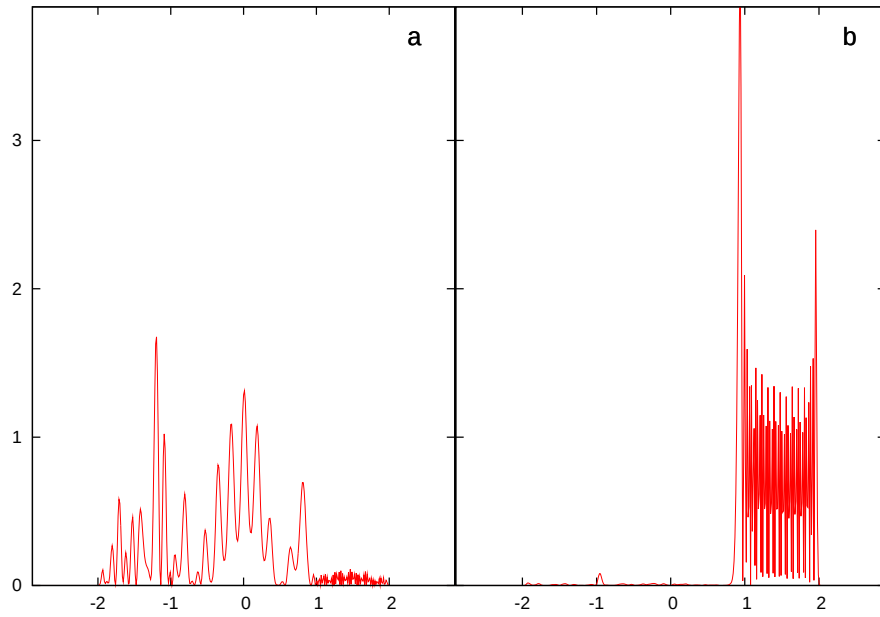
Każdemu stanowi własnemu można przypisać jego obsadzenie, które jest wartością własną jednocząstkowej macierzy gęstości odpowiadającą temu stanowi, oraz oszacować jego jednocząstkową energię. Wiedząc jak wyglądają stany własne hamiltonianu dla prostokątnej studni potencjału, można powiedzieć, że im większa jest liczba miejsc zerowych funkcji falowej opisującej dany stan, tym większa jest jego jednocząstkowa energia. Stąd pisząc o stanie podstawowym i kolejnych stanach wzbudzonych mam na

myśli ich położenie na skali energii, które mogą uszeregować znając ich funkcje własne, a obsadzenie wyznacza odpowiadająca danemu stanowi wartość własna.

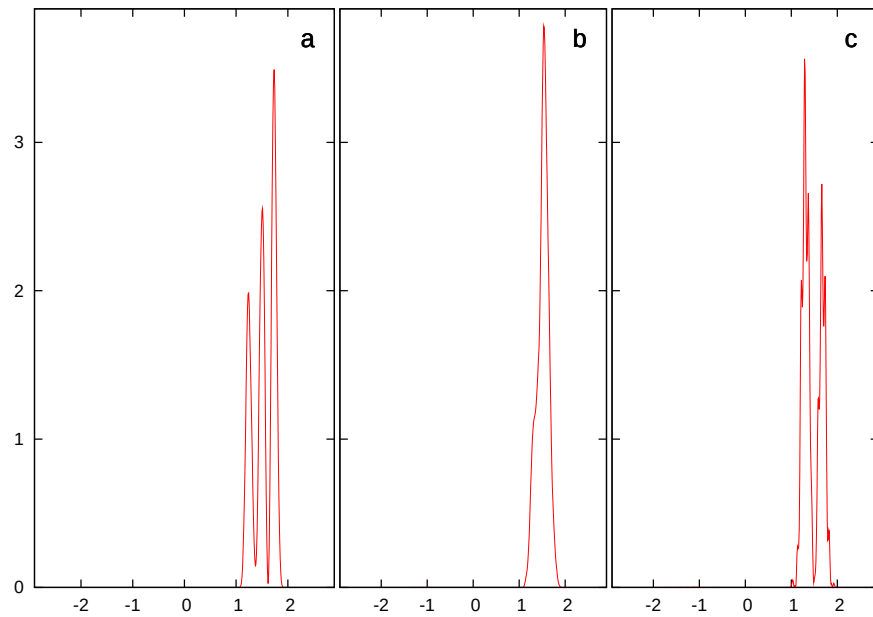
W dalszej analizie zastosuję dwa różne uporządkowania zbioru stanów. Pierwszym sposobem jest klasyfikacja na podstawie ich energii. W zastosowanym przeze mnie algorytmie nie wyznaczam dokładnie energii poszczególnych stanów, ale na podstawie kształtu odpowiednich funkcji własnych (liczba zer funkcji falowej) jestem w stanie uszeregować je na skali energii. Pisząc o stanie podstawowym i wzbudzonych mam na myśli ich uszeregowanie na skali energii. Drugi sposób odnosi się do obsadzenia stanów. Procedura diagonalizująca wykorzystywana w symulacjach sortuje stany pod względem obsadzenia. Dlatego stan o największym obsadzeniu ma zawsze numer 0 i odpowiada mu wartość własna oznaczona n_0 . Kolejne stany posortowane są pod względem obsadzenia - czyli obsadzenie stanu o numerze i jest zawsze większe od obsadzenia stanu o numerze $i+1$ ($n_i > n_{i+1}$). Pisząc o kondensacie mam na myśli stan o numerze 0 i wartości własnej n_0 .

Po transformacji potencjału układ nie znajduje się już w równowadze termodynamicznej. Przez czas $t = 5000t_0$ kondensat pozostaje w początkowej studni. Liczba cząstek w lewej studni praktycznie się nie zmienia. Zmienia się obsadzenie wektorów własnych jednocząstkowej macierzy gęstości. Dla krótkiego czasu ewolucji $t = 200t_0$ większość cząstek jest zlokalizowana w lewej studni. Możemy jednak zaobserwować transfer atomów do stanów o wyższej energii. Na przykład obsadzenie pierwszego stanu wzbudzonego równe jest $n_2 = 0.22\%$ i jest większe od obsadzenia szóstego stanu wzbudzonego $n_3 = 0.12\%$. Obsadzenia trzeciego, czwartego i piątego stanu wzbudzonego są mniejsze niż obsadzenie szóstego stanu wzbudzonego. Widzimy, że atomy wzbudzają się i wspinają po drabince stanów energetycznych. Pojawiają się wektory własne znajdujące się powyżej bariery (Rysunek 4.9a,b). Niewielka liczba cząstek - ok. 0.02% populacji pojawia się w obszarze prawej studni - są to atomy, które znajdują się ponad barierą. Dla czasu $t = 200t_0$ nie ma jeszcze żadnych wektorów własnych zlokalizowanych w prawej studni.

Dla czasu $t = 3500t_0$ kondensat nadal pozostaje w początkowym minimum. Niewielka liczba atomów pojawia się w nowej studni. W lewej studni atomy się wzbudzają,



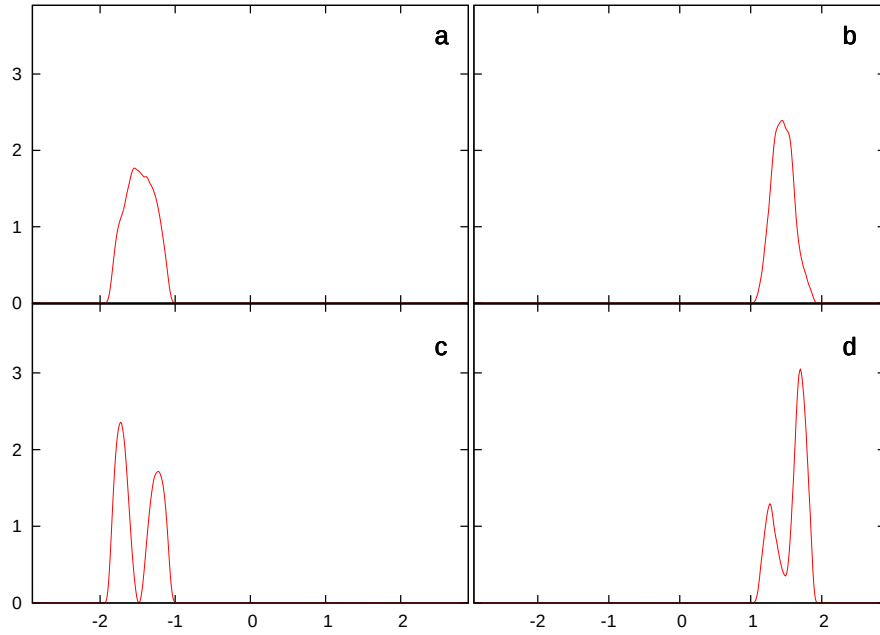
Rysunek 4.9: Wybrane wektory własne dla czasu $t = 200t_0$ w funkcji położenia. Obsadzenie stanów wynosi odpowiednio: (a) $n_5 = 0.07\%$ i (b) $n_{25} = 0.02\%$.



Rysunek 4.10: Wybrane wektory własne dla czasu $t = 3500t_0$ w funkcji położenia. Obsadzenie stanów wynosi odpowiednio: (a) $n_{12} = 0.13\%$, (b) $n_{14} = 0.11\%$, i (c) $n_{39} = 0.04\%$. W prawej studni zaczyna się pojawiać kondensat.

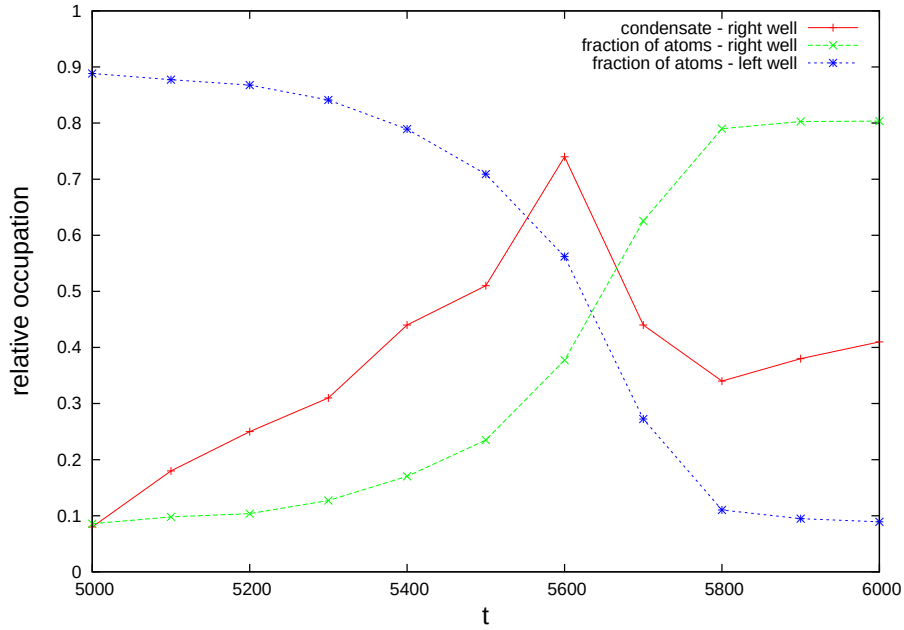
w prawej studni dzieje się coś przeciwnego - atomy schodzą po drabince stanów energetycznych. Stan podstawowy prawej studni oraz całego układu (Rysunek 4.10b) ma obsadzenie równe $n_{14} = 0.11\%$. Stany o wyższej energii mają nadal większe obsadzenie niż stan podstawowy - na przykład drugi stan wzbudzony ma obsadzenie $n_{12} = 0.13\%$ (Rysunek 4.10a). W pierwszym stanie wzbudzonym jest nadal mało cząstek: $n_{39} = 0.04\%$ (Rysunek 4.10c).

4.6.2 Nagły transfer atomów



Rysunek 4.11: Wybrane wektory własne dla czasu $t = 5500t_0$ w funkcji położenia. Obsadzenie stanów wynosi odpowiednio: (a) $n_0 = 16.1\%$, (b) $n_1 = 11.92\%$, (d) $n_2 = 9.53\%$ i (c) $n_3 = 7.43\%$. W układzie pojawiają się dwa oddzielne kondensaty w prawej i lewej studni.

Gwałtowny transfer atomów zaczyna się dla czasu $t = 5000t_0$. Całkowity czas przejścia wynosi około $1000t_0$. W chwili $t = 5500t_0$ w układzie znajdują się dwa podukłady - pierwszy umieszczony w lewej studni (Rysunek 4.11a,c) i drugi w prawej studni (Rysunek 4.11b,d). Liczba cząstek w obu tych podukładach jest porównywalna. W każdym podukładzie znajduje się kondensat. Obsadzenie obu kondensatów jest



Rysunek 4.12: Transfer kondensatu i atomów termicznych. Ciągła, czerwona linia pokazuje względną obsadę kondensatu w prawej studni, znormalizowaną do liczby cząstek w tym minimum. Przerywana, zielona linia oznacza liczbę atomów w prawej studni znormalizowaną do liczby atomów w całym układzie. Przerywana niebieska linia oznacza liczbę atomów w lewej studni znormalizowaną do liczby atomów w układzie.

podobne - w lewej studni wynosi $n_0 = 16\%$ a w prawej - $n_1 = 12\%$.

Schemat przejścia można prześledzić na rysunku 4.12. W chwili $t = 5000t_0$ większość atomów zlokalizowana jest w obrębie początkowej studni, a tylko około 10% znajduje się w obszarze nowego minimum. Tylko 10% z atomów znajdujących się w nowej studni jest w stanie podstawowym i tworzy nowy „kondensat”. W tym przypadku przez „kondensat” rozumiemy atomy, które znajdują się w stanie podstawowym danego podukładu. Dla układu w stanie równowagi ta definicja jest równoważna z definicją Penrose’a i Onsagera. Tutaj używam jej dla przypadku układu, który zmienia się w czasie i nie ma mowy o równowadze, stąd słowo „kondensat” zostało użyte kolokwialnie i wzięte w cudzysłów.

Nagły transfer atomów z lewej do prawej studni zaczyna się wtedy, gdy obsadzenie stanu podstawowego prawej studni zaczyna dominować nad obsadzeniem innych stanów w tej studni. Wszystkie przechodzące atomy zasilają nowy kondensat. Atomy nie

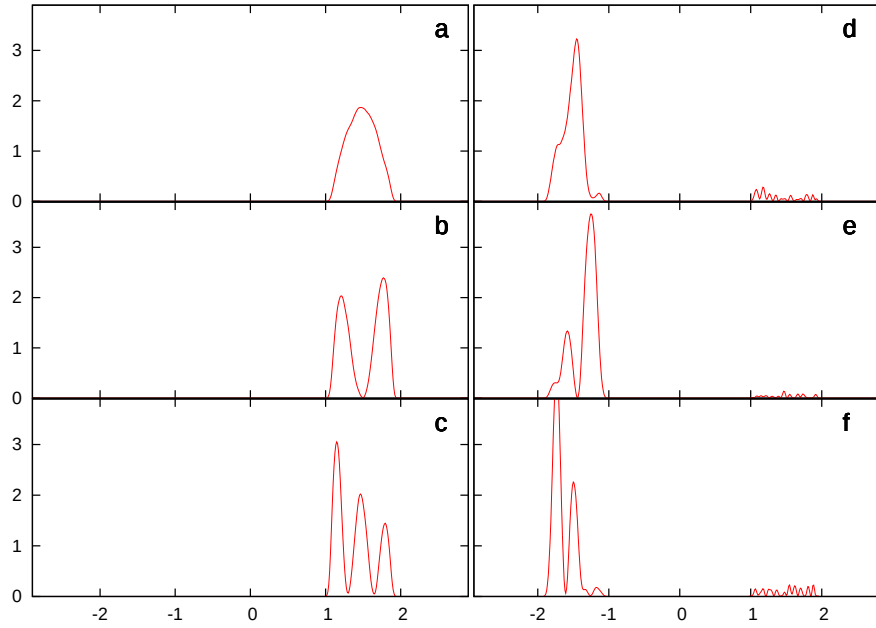
przechodzą do chmury termicznej. Na rysunku 4.12 widać, że transfer atomów do prawej studni kończy się w tym samym czasie, w którym liczba atomów skondensowanych w układzie osiąga maksimum. Zaraz po przepływie ($t = 5600t_0$) względne obsadzenie kondensatu w układzie wynosi około 75%. Dla czasu $t = 6000t_0$ liczba atomów skondensowanych spada do 40%.

Temu opisowi nie odpowiada klasyczny scenariusz destylacji, w którym atomy najpierw parują z kondensatu, potem chmura termiczna przepływa ponad barierą do prawej studni gdzie kondensuje. W tym przypadku widzimy coś przeciwnego - nagły przepływ kondensatu do nowej studni a następnie parowanie. Przypomina to słynny efekt fontanny zaobserwowany w ciekłym helu [36, 37, 38, 39]. Taki przebieg przepływu świadczy o kwantowym charakterze zjawiska i wskazuje na spójny przepływ kondensatu.

4.6.3 Dochodzenie do stanu równowagi

Nagły transfer atomów kończy się w chwili $t = 5600t_0$. Prawie wszystkie atomy są zlokalizowane w obrębie prawej studni. Podczas termalizacji obsadzenie kondensatu w prawej studni spada. Po przepływie kondensatu nie ma żadnych atomów zlokalizowanych tylko w lewej studni. Pierwsze trzy wektory własne jednocząstkowej macierzy gęstości są zlokalizowane w obrębie nowego minimum układu (Rysunek 4.13,a-c). Obsadzenie kondensatu, liczone względem całkowitej liczby atomów wynosi $n_0 = 28\%$. Trzy pierwsze stany lewej studni są przedstawione na rysunku 4.13,d-f. Ich obsadzenie jest bardzo małe - rzędu 1%. Każdy z tych stanów jest zlokalizowany w obu studniach, co świadczy o spójnym przepływie atomów. Te wektory nadal „przeciekają” do nowego minimum.

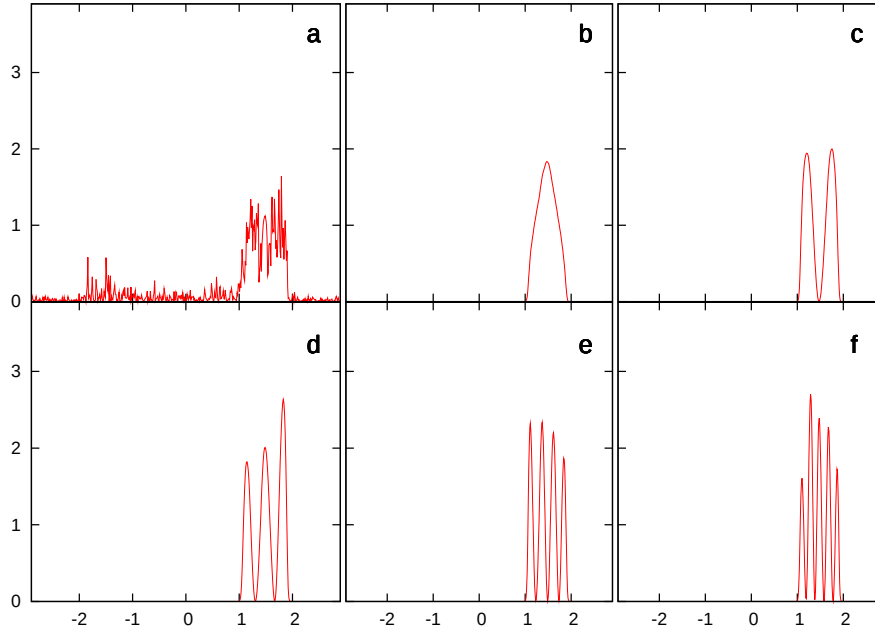
Dla czasu $t = 9000t_0$ większość atomów jest zlokalizowana w prawej studni (rysunek 4.14a). Obsadzenie kondensatu wynosi 34%. Wszystkie stany o niezaniechanym obsadzeniu są zlokalizowane w prawej studni (rysunki 4.14b-f). Niewielka liczba atomów znajduje się powyżej bariery.



Rysunek 4.13: Wybrane wektory własne dla czasu $t = 5600t_0$ w funkcji położenia. Obsadzenie stanów wynosi odpowiednio: (a) $n_0 = 28.2\%$, (b) $n_1 = 13.75\%$, (c) $n_2 = 6.85\%$, (d) $n_8 = 1.23\%$, (e) $n_7 = 1.47\%$, (f) $n_{11} = 0.93\%$. Trzy pierwsze stany (podstawowy i dwa wzbudzone) w lewej studni mają szybko oscylującą część w obszarze prawej studni. Świadczy to o spójnym transferze atomów.

4.7 Wnioski

W tym rozdziale pokazałam wyniki symulacji numerycznych przepływu kondensatu do nowego, dynamicznie stworzonego minimum. W obliczeniach wykorzystałam metodę pól klasycznych. Pokazałam, że w przypadku jednowymiarowym przepływ jest procesem kwantowym, przypominającym przepływ atomów w nadciekłym helu. Proces może być podzielony na trzy etapy. Na początku układ zaczyna poszukiwać nowego minimum. Większość atomów pozostaje w starej studni, zwiększa się natomiast obsadzenie kolejnych stanów wzbudzonych. Pewna część atomów termicznych zaczyna przechodzić ponad barierą i penetruje obszar nowego minimum. Atomy uwięzione w nowej studni zaczynają termalizować. Po pewnym czasie stan podstawowy prawej studni zaczyna być obsadzony. Gdy obsadzenie stanu podstawowego dominuje nad obsadzeniem innych stanów w nowym minimum, następuje gwałtowny przepływ



Rysunek 4.14: Gęstość atomowa i wybrane wektory własne dla czasu $t = 9900t_0$ w funkcji położenia. Obsadzenie stanów wynosi odpowiednio: (b) $n_0 = 33.85\%$, (c) $n_1 = 17.04\%$, (d) $n_2 = 6.02\%$, (e) $n_3 = 3.36\%$ i (f) $n_4 = 1.94\%$. Względne obsadzenie stanów jest znormalizowane do liczby cząstek w układzie N_{at} .

atomów z lewej studni do prawej. Na początku większość przepływających atomów zasila stan podstawowy nowej studni. Następnie podczas termalizacji część atomów paruje z nowego kondensatu i zasila chmurę termiczną. Obliczenia pokazują, że przepływ atomów w takim układzie ma kwantową naturę oraz, że metoda pól klasycznych sprawdza się przy badaniu układów dynamicznie zmieniających się w czasie.

Przedstawione w tym rozdziale wyniki symulacji zostały opublikowane w pracy [40].

Rozdział 5

Interferencja oddziałujących kondensatów – wyniki numeryczne

W tym rozdziale prezentuję wyniki badań nad rolą oddziaływań między atomami w interferencji dwóch kondensatów. W szczególności, pokazuję jak liczba atomów skondensowanych otrzymana pod koniec procesu łączenia dwóch kondensatów zależy od względnej fazy i czasu łączenia kondensatów. Pokazuję, że dla pewnych czasów łączenia kondensatów oddziaływania sprawiają, że stopień podgrzania układu podczas ich łączenia zależy od różnicy faz pomiędzy kondensatami.

5.1 Wstęp

Interferencja jest zjawiskiem typowym dla fal. Fakt występowania tego efektu dla cząstek wskazuje na ich falową naturę. W przypadku interferencji kondensatów, gdzie atomy początkowo znajdują się w pułapkach, istnieją dwa scenariusze łączenia. W pierwszym dwie chmury atomów są uwalniane z pułapek i łączą się podczas swobodnej ekspansji. Drugi scenariusz to łączenie kondensatów uwięzionych w pułapkach - bariera pomiędzy pułapkami zostaje usunięta i chmury się łączą, ale nie rozplywają się w przestrzeni jak w przypadku pierwszego scenariusza. Taki schemat łączenia chmur atomowych często realizowany jest przy pomocy chipów atomowych [41]. Interferometry na chipach są intensywnie badane, ze względu na ich mały rozmiar i szerokie zastosowania.

wanie. W opisie teoretycznym interferencji często zaniedbuje się oddziaływania między atomami. Oddziaływania zwykle prowadzą do zaburzenia odczytów interferometrów, poprzez niekontrolowane zderzenia i podgrzewanie układu. Aby zminimalizować ten efekt w realizacjach doświadczalnych łączy się chmury, które zostały uwolnione z pułapek i rozprzestrzeniały się balistycznie. Dzięki temu zmniejsza się gęstość atomów interferujących, a co za tym idzie, również oddziaływania między atomami. Drugie podejście zakładało łączenie spulapkowanych chmur gazów o bardzo małej gęstości. Pozwalało to na zmniejszenie negatywnych efektów oddziaływań między atomami. Jednak takie układy nie pozwalają na dokładne wyznaczenie względnej fazy i są trudne do uzyskania.

Kolejny problem stanowią atomy termiczne, które mają niszczący wpływ na widoczność prążków interferencyjnych. Względna liczba skondensowanych atomów bezpośrednio wiąże się z widocznością prążków interferencyjnych. Jest ona zależna frakcji skondensowanych atomów w układzie. Wiemy, że kondensat ma globalną fazę. Nasuwa się następujące pytanie: jeżeli łączymy dwa kondensaty o tej samej temperaturze ale o innej fazie to ile skondensowanych atomów będzie w układzie po połączeniu? Odpowiedź zależy od czasu łączenia kondensatów. Przy szybkim łączeniu kondensaty się podgrzeją, ale jeśli łączymy je w sposób adiabatyczny to pierwszą nasuwającą się odpowiedzią jest, że liczba skondensowanych atomów jest sumą atomów w obu kondensatach, a frakcja atomów skondensowanych będzie średnią ważoną frakcji z obu kondensatów. Jednak takie podejście nie uwzględnia początkowej różnicy faz między kondensatami. Po połączeniu dostajemy jeden kondensat o jednej globalnej fazie, czyli w trakcie łączenia musi się również wyrównać faza obu kondensatów, a to generuje atomy termiczne w układzie. W tym rozdziale zaprezentujemy obliczenia pokazujące jak liczba atomów skondensowanych otrzymana po połączeniu dwóch kondensatów zależy od względnej fazy i czasu łączenia.

5.2 Doświadczenie

W pracy [42] autorzy pokazali, że łączenie chmur atomów w pułapce, bez ich uprzedniej ekspansji balistycznej (czyli gęstość atomów jest taka jak typowa gęstość w pułapce – $10^{12} - 10^{15}$ atomów na centymetr sześcienny) prowadzi do podgrzania układu. Pokazali również, że dla pewnych czasów rekombinacji chmur atomowych podgrzanie układu jest zależne od względnej fazy między dwoma chmurami i może być użyte jako dokładna metoda pomiarowa.

W doświadczeniu autorzy [42] przygotowywali dwa kondensaty o dobrze określonej względnej fazie a następnie łączyli je zmieniając czas rekombinacji pułapek.

Początkowo pojedynczy kondensat został przygotowany w pułapce harmoniczej o kształcie cygara. Parametry pułapki wynosiły odpowiednio: częstość radialna - $\omega_r = 1000Hz$, częstość osiowa $\omega_a \sim 10Hz$. Następnie rozdzielono go na dwa niezależne kondensaty wzdłuż długiej osi pułapki. Czas rozdzielania był na tyle duży, aby proces był adiabatyczny ($t_s = 75msek$). Następnie obu kondensatom pozwolono niezależnie ewoluować w pułapkach. Ponieważ kondensaty nie były rozdzielone równomiernie i po podziale różniły się liczbą cząstek, w wyniku ewolucji wytworzyła się między nimi różnica faz θ . Autorzy [42] pokazali, że proces rozdzielania jest powtarzalny i różnica faz między kondensatami zależy tylko od czasu ewolucji układu. Następnie kondensaty zostały połączone i badano liczbę atomów skondensowanych w układzie. Autorzy pokazali, że dla bardzo krótkich (porównywalnych z częstością radialną pułapki, $t_m = 1msek$) i bardzo długich (proces adiabatyczny $t_m = 100msek$) czasów łączenia interferometr nie był wrażliwy na różnicę faz między kondensatami. Wykazali również, że dla pewnego zakresu czasów łączenia dwóch kondensatów ($t_m \in (5, 10)msek$) interferometr wykazuje zwiększoną wrażliwość na różnicę faz między dwoma kondensatami. Różnica między względną liczbą skondensowanych atomów dla stanu o względnej fazie $\phi = 0$ i stanu o $\phi = \pi$ wynosiła około 20%.

5.3 Wyniki numeryczne

W tej części przedstawię wyniki symulacji numerycznych, których celem było pokazanie jak wzbudzenia termiczne i różne czasy łączenia dwóch kondensatów wpływają na dokładność interferometru. Ponieważ opisywany układ miał temperaturę większą od zera bezwzględnego oraz wpływ atomów termicznych był istotny do obliczeń stosowałam metodę pól klasycznych, opisaną w rozdziale 3.3, która pozwala na uwzględnienie zarówno kondensatu jak i stowarzyszonej z nim chmury termicznej.

W obliczeniach badałam przepływ atomów z kondensatu do chmury termicznej. Pokazałam, że w przypadku badania interferencji na podstawie strat liczby skondensowanych atomów, czułość interferometru zależy od czasu w jakim kondensaty były łączone.

Aby skrócić czas obliczeń i uprościć model w symulacjach ograniczyłam się do dwóch wymiarów przestrzennych. Tylko kierunek długiej osi pułapki y oraz kierunek, w którym kondensat był rozdzielany a następnie łączony – x został wzięty pod uwagę. Pomimo tych uproszczeń nadal uwzględniona została możliwość wzbudzeń cząstek w „łatwej”, długiej osi pułapki.

W obliczeniach rozwiązywałam równanie Grossa-Pitajewskiego:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left(-\frac{1}{2}\nabla_{x,y}^2 + V(x,y,t) + gN|\Psi|^2\right)\Psi, \quad (5.1)$$

gdzie $V(x,y,t)$ jest dwuwymiarowym, zmiennym w czasie potencjałem pułapkującym a gN jest stałą charakteryzującą oddziaływania między cząstkami. Równanie jest zapisane w jednostkach oscylatorowych. Jednostki długości, energii i czasu dane są wzorem:

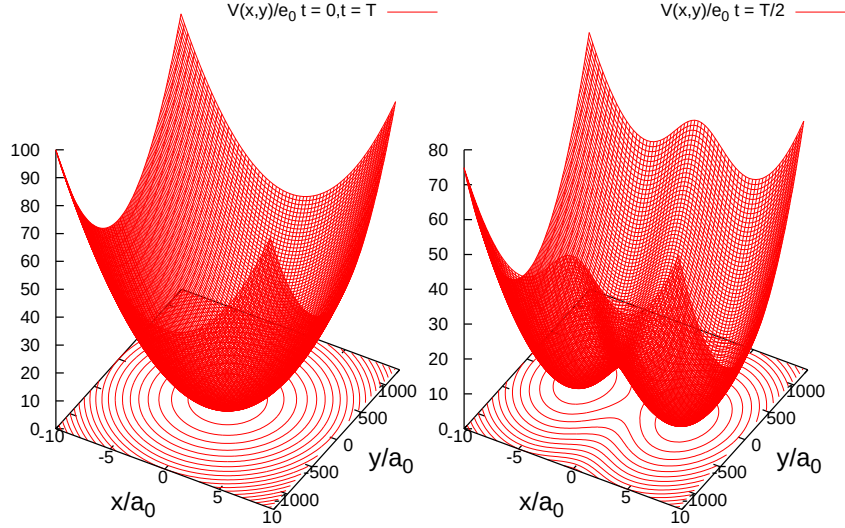
$$a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_r}}, \quad (5.2)$$

$$e_0 = \hbar\omega_r, \quad (5.3)$$

$$t_0 = \frac{1}{\omega_r}, \quad (5.4)$$

gdzie ω_r jest radialną częstotliwością pułapki. Dla parametrów wziętych z eksperymentu [42] jednostki oscylatorowe wynoszą odpowiednio: $a_0 = 0.64\mu m$, $e_0 = 1kHz \times \hbar$,

$t_0 = 0.16ms$. Współczynnik gN dla zrenormalizowanego równania (5.1) w dwóch wymiarach wynosi $gN_{at} = 12800e_0/(a_0)^2$. Współczynnik został dobrany w taki sposób, aby wartości numeryczne energii układu i potencjału chemicznego zgadzały się z wartościami doświadczalnymi.



Rysunek 5.1: Potencjał pułapkujący. Po lewej stronie przedstawiono kształt potencjału dla czasu $t = 0$ lub $t = \tau$. Potencjał ma kształt pojedynczej, harmonicznego pułapki. Częstotliwości pułapki wynoszą: częstota radialna - $\omega_r = 1/t_0$, częstota osiowa - $\omega_a = 128/t_0$. Po prawej stronie potencjał dla czasu $t = \tau/2$ - podwójna studnia potencjału. Wysokość bariery między studniami wynosi $V_b = 10e_0$, odległość między środkami studni wynosi $d = 10a_0$.

Zależny od czasu potencjał pułapkujący w dwóch wymiarach dany jest wzorem:

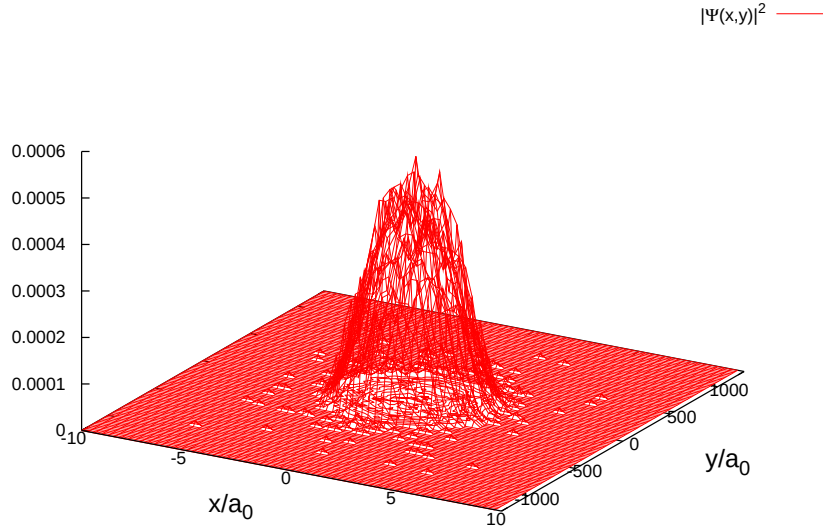
$$V(x, y, t) = \frac{(x^2\omega_r^2 - d^2)^2}{2(x^2\omega_r^2 + d^2)} + \frac{y^2\omega_a^2}{2}, \quad (5.5)$$

gdzie $d = a\sin^2(\pi t/\tau)$, $a = 4.7a_0$. Wartość τ może przyjmować dwie wartości: pierwszą gdy $\tau = 2t_m$, gdzie t_m to czas łączenia dwóch kondensatów lub $\tau = 2t_s$, gdzie t_s to czas rozdzielania dwóch kondensatów.

Na rysunku 5.1 pokazano dwa stany potencjału pułapkującego – dla czasu $t = 0$ i $t = \tau$ potencjał ma postać pojedynczej harmonicznego studni o częstotliwościach: radialnej –

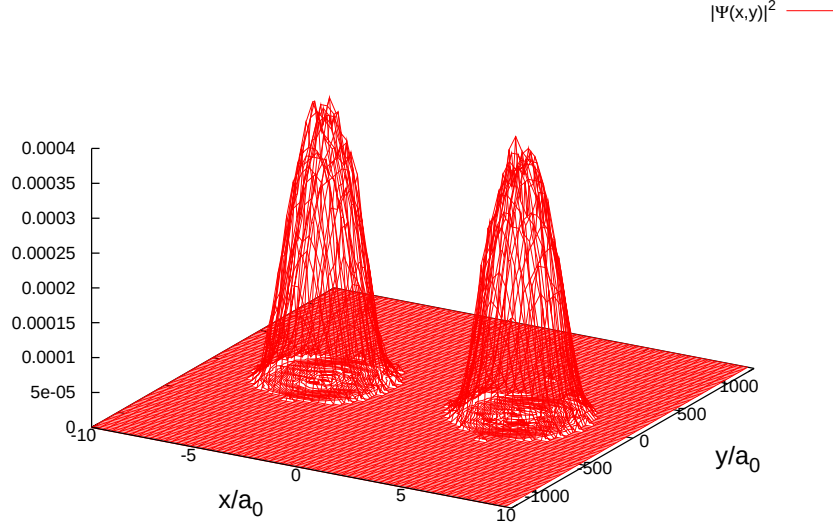
$\omega_r = 1$ oraz osiowej $-\omega_a = 128$. Dla czasu $t = \tau/2$ bariera ma najwyższą wysokość i potencjał składa się z dwóch symetrycznych studni. Wysokość bariery między studniami wynosi $V_b = 10e_0$ a odległość między środkami studni – $d = 10a_0$. Pomiedzy czasem $t = 0$ a $t = \tau/2$ potencjał zmienia się z pojedynczej studni w podwójną. Pomiedzy czasem $t = \tau/2$ a $t = \tau$ dwie studnie się łączą.

5.4 Stan początkowy



Rysunek 5.2: Gęstość atomów stanu początkowego w pojedynczej studni potencjału. Rysunek przedstawia gęstość stanu w przestrzeni $|\Psi(x,y)|^2$. Energia stanu wynosi $E = 5.8e_0$ a względna liczba atomów skondensowanych $n_0 = 93\%$.

Przygotowanie stanu początkowego wyglądało podobnie jak w przypadku destylacji kondensatu (rozdział 4). Najpierw, za pomocą metody czasu urojonego, w pojedynczej studni potencjału został przygotowany stan podstawowy. Energia stanu podstawowego wynosiła $E_0 = 3.85e_0$. Następnie stan zaburzono zwiększając jego energię kinetyczną. Stan termalizowano tak długo, aż osiągnął stan równowagi termodynamicznej. Końcowa energia stanu po zaburzeniu wynosiła $E = 5.8e_0$, co stanowi około 150% energii stanu podstawowego, a liczba atomów skondensowanych wynosiła $n_0 = 93\%$. Rysunek



Rysunek 5.3: Gęstość atomów stanu początkowego w podwójnej studni potencjału. Rysunek przedstawia gęstość stanu w przestrzeni $|\Psi(x,y)|^2$. Energia stanu wynosi $E = 5.03e_0$ a względna liczba atomów skondensowanych $n_0 = 90\%$.

5.2 przedstawia przykładowy stan początkowy w pojedynczej studni potencjału. Użytkano jedenastu stanów początkowych o takiej samej energii i liczbie skondensowanych atomów. Stany początkowe odpowiadały różnym chwilom ewolucji układu znajdującego się w stanie równowagi termodynamicznej w stanie równowagi termodynamicznej.

Aby upewnić się, że po rozdzieleniu różnica faz między kondensatami będzie wynosiła zero, każdy z jedenastu stanów został adiabaticznie podzielony na pół wzdłuż osi y . Cząstki w obu studniach były od siebie oddzielone barierą i nie oddziaływały. Czas rozdzielania wynosił $t_s = 470t_0$ i odpowiadał doświadczalnemu czasowi rozdzielania kondensatów $t_s = 75ms$. Po rozdzieleniu względna liczba atomów skondensowanych w każdym stanie początkowym wynosiła około $n_0(t = 0) = 90\%$ a energia – $E(t = 0) = 5.03e_0$. Przykładowy stan początkowy w podwójnej studni potencjału pokazany jest na rysunku 5.3.

Parametry układu numerycznego były następujące:

- rozmiary układu: $L_x = 20a_0$, $L_y = 2560a_0$;

- liczba punktów siatki: $n_x = 64$, $n_y = 8192$.

5.5 Wyniki

Na początku ewolucji faza θ z zakresu od 0 do π była nadpisywana na prawy kondensat. Dla $x > 0$:

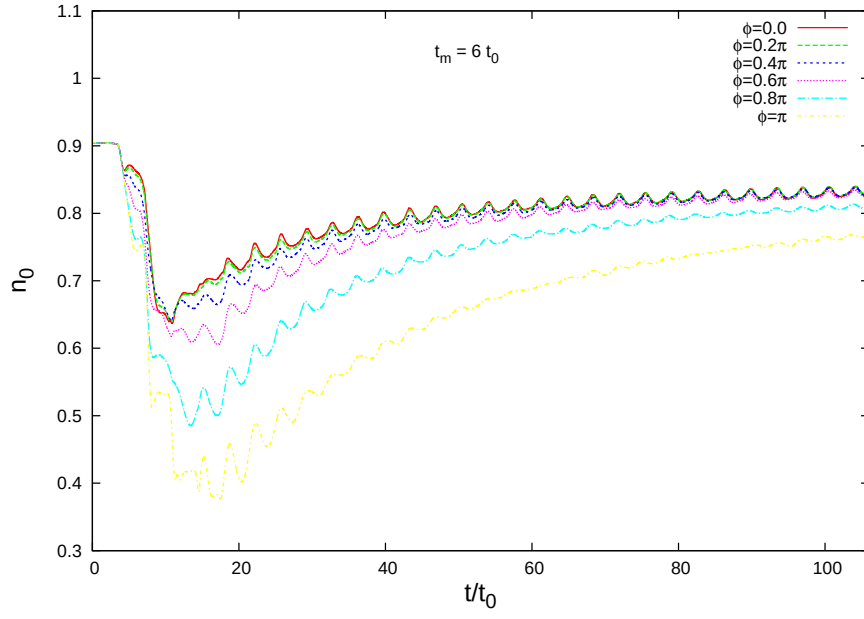
$$\Psi(x, y) \rightarrow \Psi(x, y) \times e^{i\theta}. \quad (5.6)$$

W tym przypadku nadpisanie fazy odpowiada doświadczalnemu poddaniu kondensatu swobodnej ewolucji, podczas której zmienia się faza kondensatu. W eksperymencie początkowy, pojedynczy kondensat został podzielony na dwie części i pozwolono im niezależnie ewoluować przez pewien okres czasu, w wyniku czego wytworzyła się różnica faz między kondensatami. Jak wcześniej wspomniano, autorzy pokazali, że różnica faz zależy od czasu swobodnej ewolucji kondensatów i wynik jest powtarzalny.

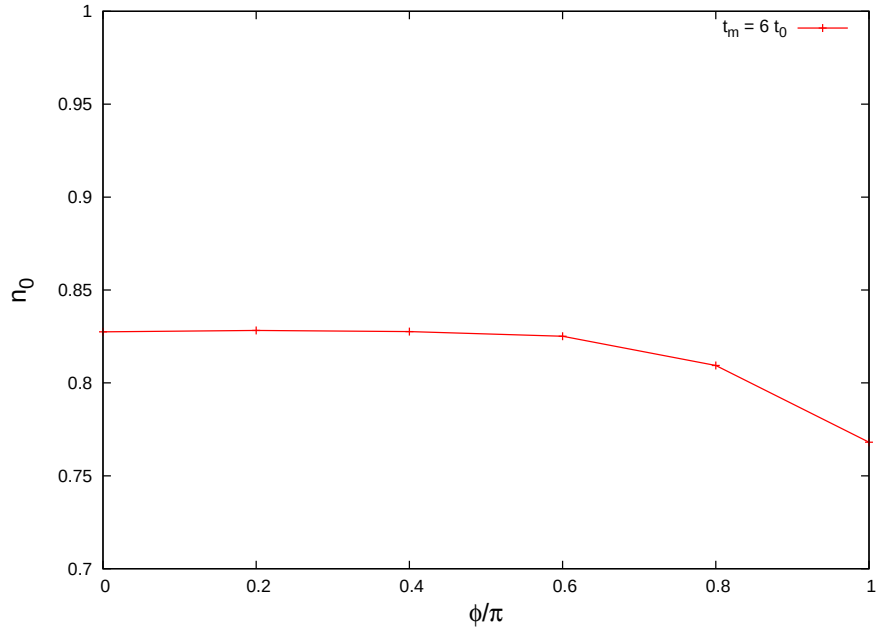
Następnie obie studnie były łączone przez czas t_m . W czasie ewolucji monitorowano zmiany liczby skondensowanych atomów w czasie, dla różnych czasów łączenia studni t_m oraz dla różnych nadpisanych faz. Macierz gęstości była uśredniana po układzie 11 stanów i po przestrzeni (kierunek y).

5.5.1 Szybkie łączenie – $t_m = 6t_0$

W przypadku bardzo szybkiego, nieadiabatycznego łączenia kondensatów ($t_m = 6t_0$ co odpowiada fizycznej wartości czasu $t_m = 1ms$) nie występuje zjawisko zwiększonej czułości interferometru. Rysunek 5.4 przedstawia względną liczbę skondensowanych atomów w czasie dla wybranych wartości różnicy faz między kondensatami. Rysunek 5.5 przedstawia względną liczbę skondensowanych atomów dla czasu ewolucji równego $t_e = 106t_0$ w funkcji różnicy faz między kondensatami. Dla długich czasów ewolucji liczba skondensowanych atomów w układzie nie jest wrażliwa na wartość nadpisanej fazy. Tylko dla dużych faz z zakresu od 0.7π do π występują pewne różnice w odczytach. Nagły spadek liczby atomów skondensowanych na początku ewolucji jest prawdopodobnie spowodowany gwałtownym połączeniem obu kondensatów, które prowadzi do podgrzania układu. Dla krótszych czasów ewolucji dokładność dla dużych



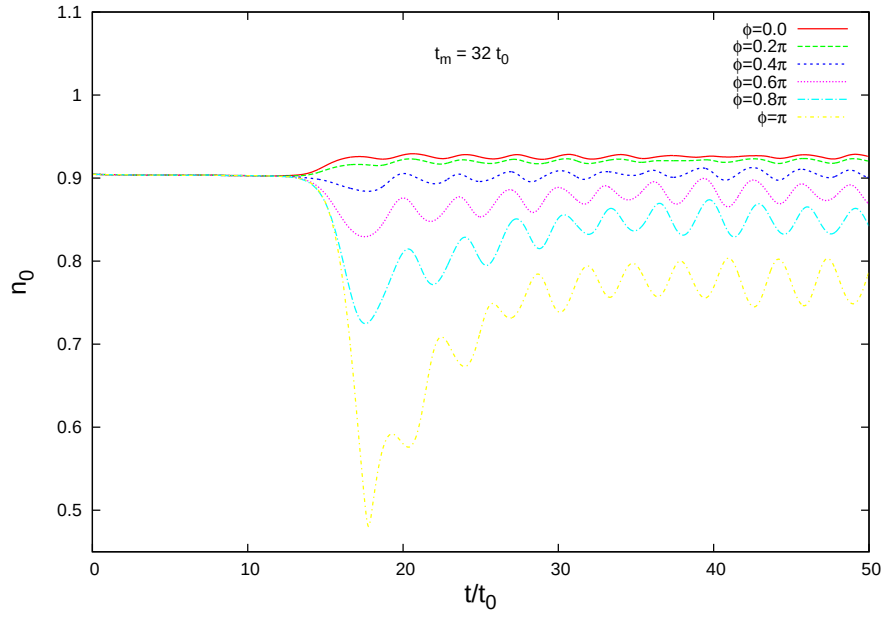
Rysunek 5.4: Frakcja kondensatu n_0 w funkcji czasu dla wybranych różnic faz między kondensatami. Czas łączenia kondensatów wynosił $t_m = 6t_0$.



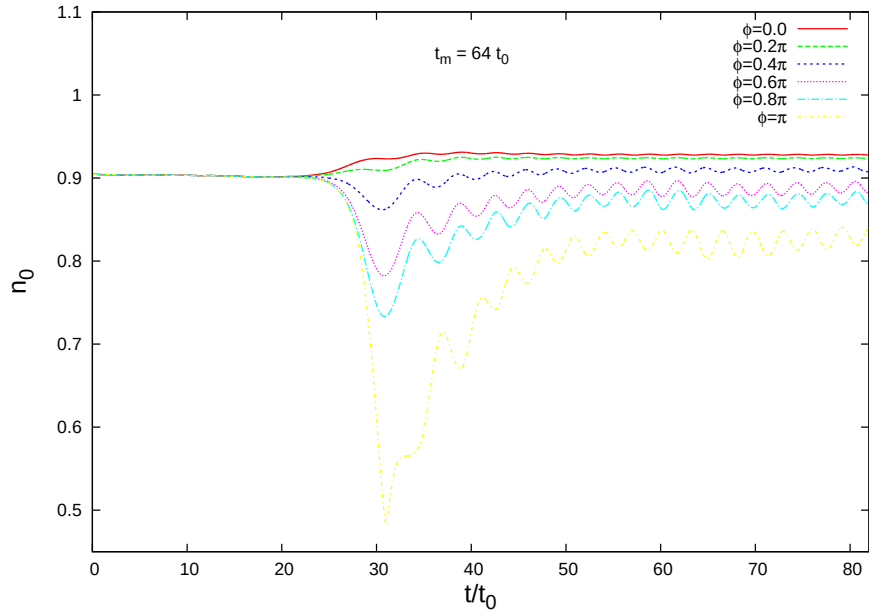
Rysunek 5.5: Względna liczba skondensowanych atomów dla czasu $t = 106t_0$ w funkcji nadpisanej fazy. Czas łączenia kondensatów wynosił $t_m = 6t_0$.

różnic faz między kondensatami jest nieco większa.

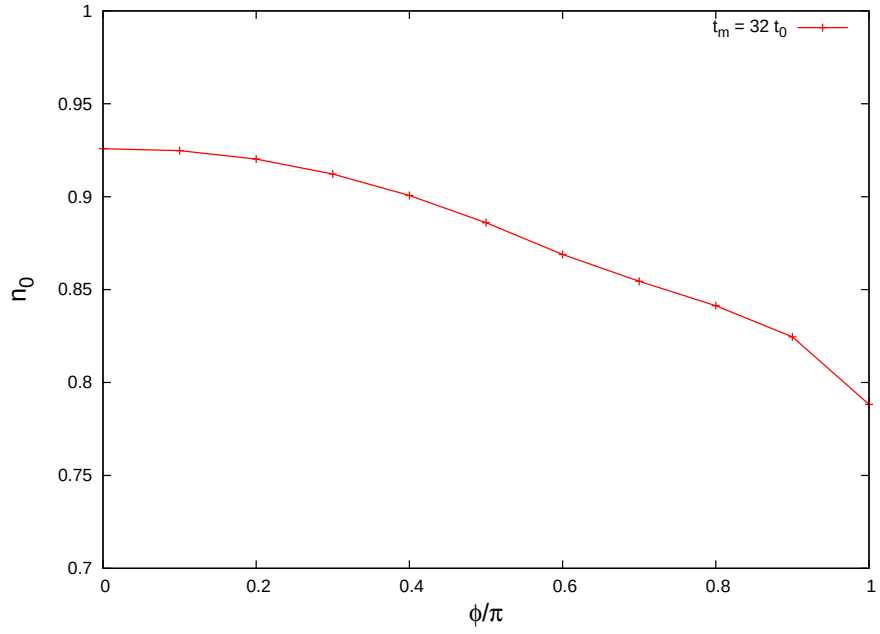
5.5.2 Reżim zwiększonej czułości – $t_m = 32t_0$ i $t_m = 64t_0$



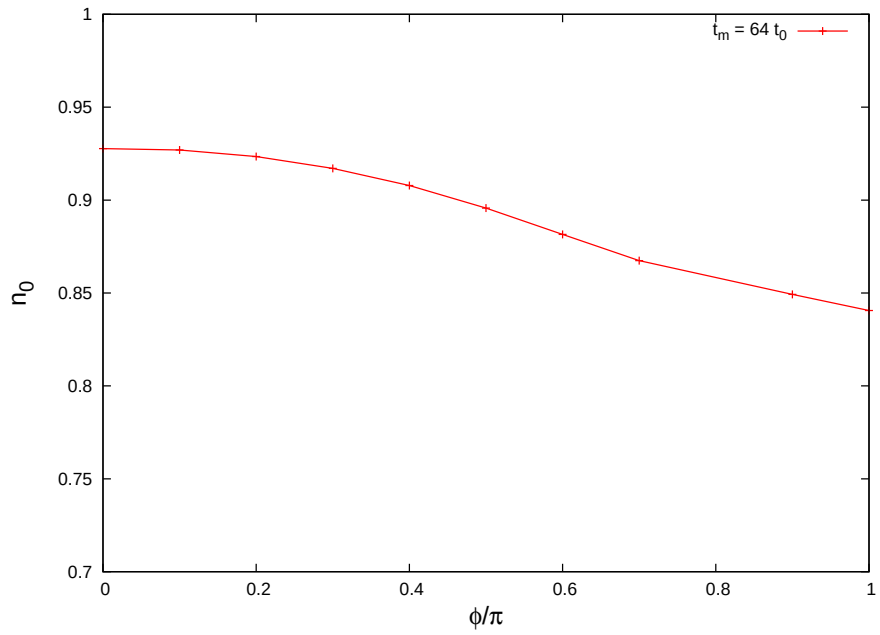
Rysunek 5.6: Frakcja kondensatu n_0 w funkcji czasu dla wybranych różnic faz między kondensatami. Czas łączenia kondensatów wynosił $t_m = 32t_0$.



Rysunek 5.7: Frakcja kondensatu n_0 w funkcji czasu dla wybranych różnic faz między kondensatami. Czas łączenia kondensatów wynosił $t_m = 64t_0$.



Rysunek 5.8: Względna liczba skondensowanych atomów dla czasu $t = 50t_0$ w funkcji nadpisanej fazy. Czas łączenia kondensatów wynosił $t_m = 32t_0$.



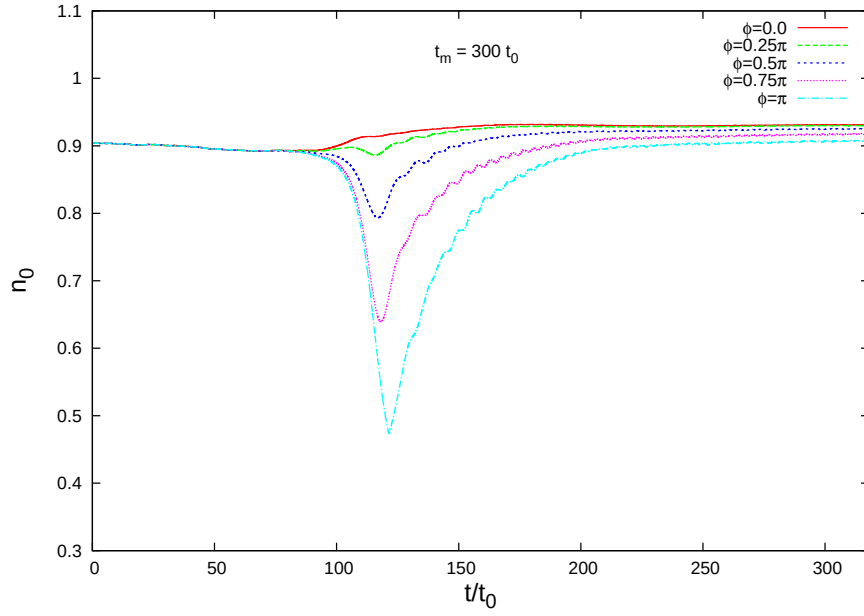
Rysunek 5.9: Względna liczba skondensowanych atomów dla czasu $t = 82t_0$ w funkcji nadpisanej fazy. Czas łączenia kondensatów wynosił $t_m = 64t_0$.

W przypadku pośrednich czasów łączenia kondensatów: $t_m = 32t_0$ oraz $t_m = 64t_0$

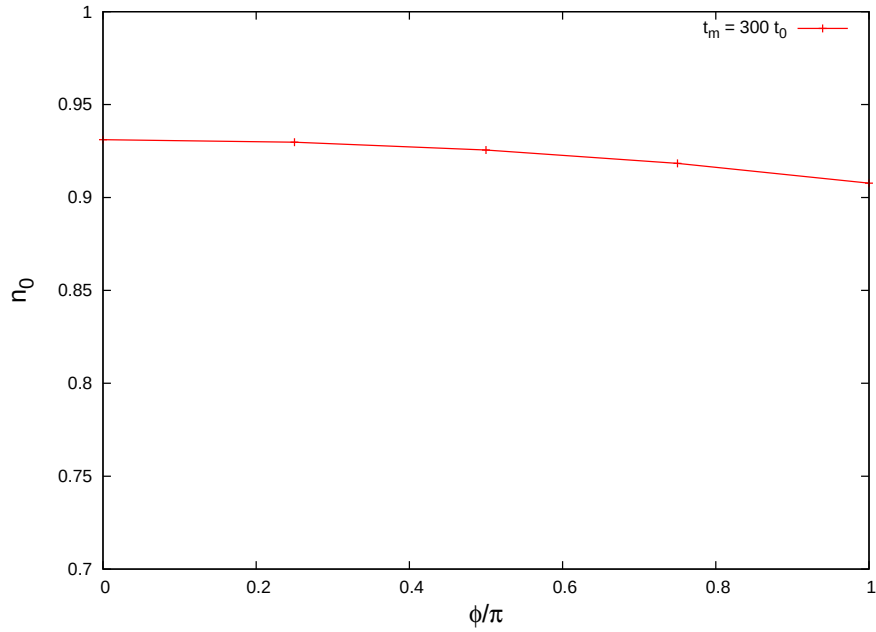
obserwujemy zwiększoną czułość interferometru ze względu na nadpisaną fazę. Czasy łączenia odpowiadają czasom w doświadczeniu [42] i wynoszą odpowiednio $t_m = 5ms$ i $t_m = 10ms$. Rysunki 5.6 i 5.7 przedstawiają czasową zależność względnej liczby atomów skondensowanych dla różnych nadpisanych faz dla czasu łączenia kondensatów odpowiednio: $t_m = 32t_0$ i $t_m = 64t_0$. Rysunki 5.8 oraz 5.9 przedstawiają liczbę skondensowanych atomów w funkcji nadpisanej fazy dla czasu ewolucji równego $t_e = t_m + 18t_0$. W obu przypadkach widać zależność liczby skondensowanych atomów od nadpisanej fazy. Różnica liczby skondensowanych atomów w przypadku fazy $\theta = 0$ i $\theta = \pi$ wynosi około 15% dla czasu łączenia $t_m = 32t_0$ i około 10% dla $t_m = 64t_0$. Dla małych faz ($0 - 0.2\pi$) różnice we względnym obsadzeniu kondensatu są niewielkie. Początkowy spadek liczby atomów skondensowanych jest związany z przepływem kondensatu ponad barierą w chwili, gdy wysokość bariery jest porównywalna z potencjałem chemicznym kondensatu. W przypadku braku różnicy faz między studniami, układ po połączeniu wraca do równowagowego stanu początkowego. W tych obliczeniach nie brano pod uwagę strat atomów podczas ewolucji układu.

5.5.3 Łączenie adiabatyczne – $t_m = 300t_0$

W przypadku powolnego łączenia kondensatów – $t_m = 300t_0$ co odpowiada fizycznemu czasowi łączenia $t_m = 48ms$, również nie zaobserwowałam zwiększonej czułości interferometru. Na rysunku 5.11 widać, że liczba skondensowanych atomów pod koniec ewolucji nie zależy od nadpisanej fazy. Różnice pomiędzy skrajnymi obliczeniami (dla $\theta = 0$ i $\theta = \pi$) wynoszą mniej niż 2%. Podobnie jak w poprzednim przypadku początkowy spadek liczby atomów skondensowanych jest spowodowany przepływem atomów ponad obniżającą się barierą.



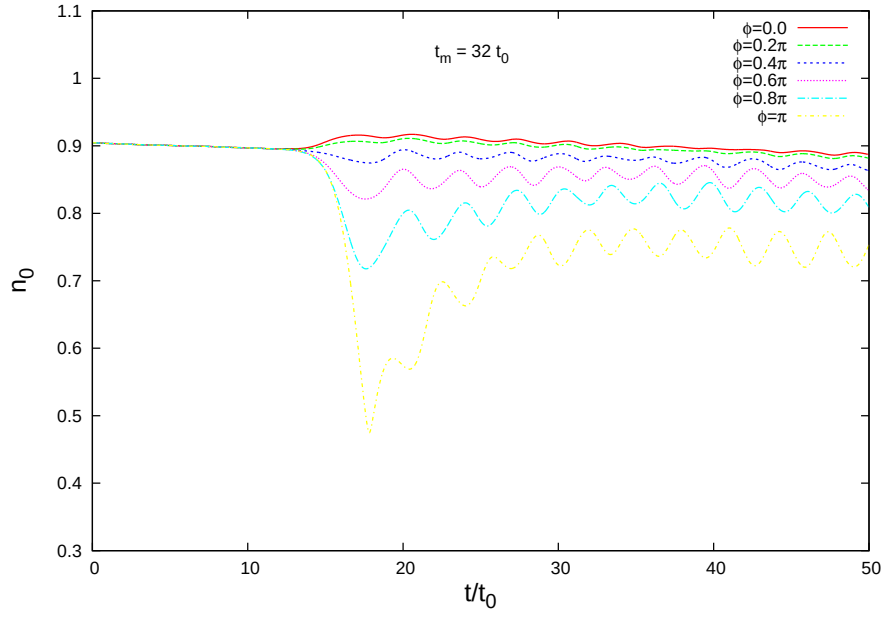
Rysunek 5.10: Frakcja kondensatu n_0 w funkcji czasu dla wybranych różnic faz między kondensatami. Czas łączenia kondensatów wynosił $t_m = 300t_0$.



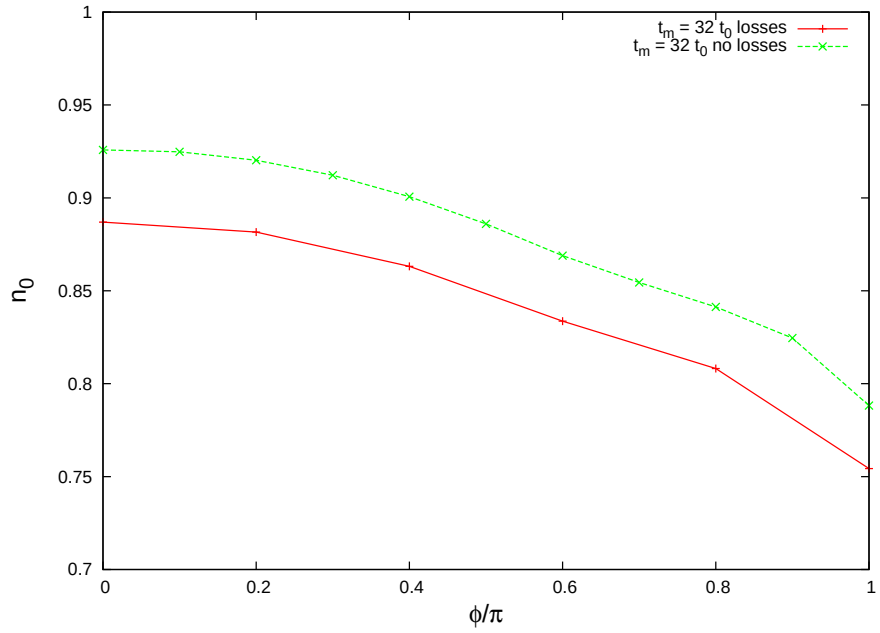
Rysunek 5.11: Względna liczba skondensowanych atomów dla czasu $t = 318t_0$ w funkcji nadpisanej fazy. Czas łączenia kondensatów wynosił $t_m = 300t_0$.

5.6 Reżim zwiększonej czułości – $t_m = 32t_0$ i $t_m = 64t_0$, przypadek ze stratami atomów

Wyniki symulacji dają nam podobną dokładność jak w doświadczeniu [42]. Różnią się natomiast liczbą atomów skondensowanych pod koniec ewolucji – w przypadku do-



Rysunek 5.12: Frakcja kondensatu n_0 w funkcji czasu dla wybranych różnic faz między kondensatami w przypadku ze stratami. Czas łączenia kondensatów wynosił $t_m = 32t_0$.



Rysunek 5.13: Względna liczba skondensowanych atomów dla czasu $t = 50t_0$ w funkcji nadpisanej fazy w przypadku, ze stratami (czerwona, ciągła linia) i bez strat (zielona, przerywana linia). Czas łączenia kondensatów wynosił $t_m = 32t_0$.

świadczenia [42] na końcu jest ich znacznie mniej niż wykazują obliczenia dla modelu, w którym nie uwzględniamy ucieczki atomów z układu. Spowodowane jest to stratami atomów w układzie doświadczalnym. W przypadku, gdy uwzględniamy straty w naszym układzie, liczba atomów skondensowanych zmniejsza się podczas ewolucji. Aby uwzględnić straty w układzie skorzystałam ze sposobu opisanego w [43]. Równanie opisujące ewolucję układu ze stratami wygląda następująco:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left(-\frac{1}{2}\nabla_{x,y}^2 + V(x,y,t) + gN_{at}|\Psi|^2 - i\gamma|\Psi|^4\right)\Psi, \quad (5.7)$$

gdzie γ mówi o stratach atomów na skutek zderzeń trójciałowych. Współczynnik γ został dobrany w taki sposób, aby podczas ewolucji z układu uciekła odpowiednia liczba cząstek. W tym przypadku liczba atomów w układzie zmniejszyła się o 3% w czasie ewolucji układu $t_e = 50t_0$.

Rysunek 5.12 przedstawia liczbę skondensowanych atomów w układzie jako funkcję czasu dla wybranych różnic faz między kondensatami. Rysunek 5.13 przedstawia liczbę skondensowanych atomów pod koniec ewolucji ($t = 50t_0$) jako funkcję nadpisanej fazy dla przypadku ze stratami (czerwona, ciągła linia) i dla przypadku bez strat (zielona, przerywana linia). Jak widać na rysunkach, uwzględnienie strat nie wpływa na wrażliwość interferometru, zmniejsza się za to liczba atomów skondensowanych w układzie pod koniec ewolucji.

5.7 Wnioski

Wyniki numeryczne są jakościowo podobne do wyników doświadczalnych [42]. Dla krótkich czasów łączenia kondensatów ($t_m = 6t_0$) zaobserwowano duży spadek liczby atomów skondensowanych i małą wrażliwość na nadpisaną fazę. Dla bardzo długich czasów łączenia ($t_m = 300t_0$) liczba atomów skondensowanych pod koniec ewolucji jest praktycznie taka sama jak dla stanu w pojedynczej studni. Ma to związek z tym, że w obliczeniach nie uwzględniono strat, a potencjał zmieniany był w sposób adiabatyczny. Czułość na nadpisaną fazę jest znikoma. Dla czasów łączenia równych $t_m = 32t_0$ oraz $t_m = 64t_0$ układ jest wrażliwy na nadpisaną fazę. W obliczeniach osiągnięto podobną czułość jak w doświadczeniu [42], ale straty liczby atomów skondensowanych

w układzie są dwukrotnie mniejsze. Zakładam, że ma to związek z nieuwzględnieniem ucieczki atomów z pułapki w przeprowadzonych obliczeniach. W przypadku układu z uwzględnionymi stratami pokazano, że czułość interferometru pozostaje na tym samym poziomie, ale zmniejsza się liczba atomów skondensowanych pod koniec ewolucji.

Rozdział 6

Wnioski

Głównym celem mojej pracy doktorskiej było zbadanie metodami symulacji komputerowych dynamiki kondensatu Bosego-Einsteina w temperaturze większej od zera bezwzględnego w układach, w których frakcja atomów zmienia się w czasie. Symulacje polegały na rozwiązywaniu równania Grossa- Pitajewskiego w oparciu o metodę pól klasycznych [1]. Pokazałam, że metoda pól klasycznych może być z powodzeniem zastosowana do symulacji układów nie będących w stanie równowagi termodynamicznej, również takich w których potencjał pułapkujący zmienia się dynamicznie w czasie.

W mojej pracy zajmowałam się dwoma zagadnieniami związanymi z ultrazimnym gazem bozonowym w podwójnych studniach potencjału. Motywacją do przeprowadzenia symulacji dla takich układów były prace doświadczalne przeprowadzone w grupie Wolfganga Ketterlego [35, 42]. Pierwsze zagadnienie dotyczyło kwantowej destylacji kondensatu Bosego-Einsteina. Drugie zagadnienie związane było z interferometrem składającym się z dwóch kondensatów, z uwzględnieniem oddziaływań między atomami w układzie. W obu przypadkach badałam układy znajdujące się w temperaturze większej od zera bezwzględnego, czyli w obliczeniach uwzględniałam nie tylko kondensat ale również chmurę termiczną. W tej rozprawie przedstawiam wyniki symulacji numerycznych. Dla obu rozpatrywanych układów wyniki zgadzają się jakościowo z doświadczeniami, co prowadzi do wniosku, że metoda pól klasycznych dobrze opisuje układy zmienne w czasie.

W **rozdziale czwartym** przedstawiłam symulacje numeryczne kwantowej destyla-

cji kondensatu Bosego-Einsteina. W układzie z pojedynczą studnią potencjału zostało wytworzone nowe minimum. Nowa studnia była oddzielona od początkowej barierą, której wysokość nie pozwalała na bezpośredni przepływ atomów powyżej przeszkody a prawdopodobieństwo tunelowania było zanedbywalnie małe. Dzięki metodzie pól klasycznych wyjaśniłam jak wygląda mechanizm stojący za przepływem atomów do nowego minimum. Najważniejszym wynikiem tych symulacji było pokazanie, że w przybliżeniu jednowymiarowego modelu przepływ atomów jest koherentnym procesem kwantowym, a nie klasyczną destylacją jak sugerowali autorzy doświadczenia [35]. Po pojawieniu się nowego minimum i obniżeniu bariery między studniami atomy z chmury termicznej penetrują obszar nowego minimum. Atomy z obszaru nowego minimum zaczynają wchodzić do nowej studni, podobne jak w przypadku zwykłej destylacji. Po pewnym czasie w obrębie nowej studni pojawia się „kondensat” - atomy obsadzają stan podstawowy nowej studni. Gdy stan podstawowy nowej studni staje się istotnie obsadzony w porównaniu z obsadzeniem innych stanów w tej studni, następuje nagły przepływ atomów ze stanu podstawowego początkowej pułapki do stanu podstawowego nowej studni. Dopiero później nowy kondensat (makroskopowo obsadzony stan podstawowy nowej studni i jednocześnie najsilniej obsadzony stan całego układu) paruje i termalizuje dochodząc do stanu równowagi.

Pewien niedosyt pozostawia fakt, że wyniki numeryczne zgadzają się z doświadczeniem [35] tylko jakościowo. W symulacjach numerycznych skale czasowe są około stu razy większe niż w eksperymencie. Powodów takiego zachowania może być kilka, zostały one pokrótce wypunktowane poniżej.

- Najpoważniejszym przybliżeniem było ograniczenie wymiarowości układu z trzech do jednego wymiaru. Ponieważ nowe minimum zostało wytworzone równoległe do długiej osi kondensatu a w symulacjach uwzględniłam tylko kierunek przepływu atomów (prostopadły do długiej osi kondensatu) układ stracił „łatwy” kierunek wzbudzeń. Konsekwencje tego przybliżenia zostały dokładnie omówione w podrozdziale 4.4.
- Metoda pól klasycznych nie uwzględnia procesów spontanicznych, a jedynie pro-

cesy wymuszone. W badanym procesie układ przechodzi do nowego stanu, w szczególności atomy zasiedlają początkowo puste mody w nowej studni. Inicjacja obsadzenia tych modów jest niewątpliwie związana z przejściami spontanicznymi. W moich symulacjach numerycznych stany w nowym minimum były początkowo obsadzone jedynie poprzez wykładniczo zanikający „ogon”. Zbadanie roli przejść spontanicznych w destylacji kondensatu Bosego-Einsteina jest zadaniem bardzo trudnym, wymagającym opisu w pełni kwantowego. Jak dotąd nie udało się sformułować takiego satysfakcjonującego i efektywnego opisu.

- Arbitralność wyboru parametru obcięcia. Ponieważ w układzie liczba stanów makroskopowo obsadzonych zmienia się wraz z geometrią potencjału pułapkującego nie jest jasne jak dobrać parametr obcięcia. Mój wybór parametru obcięcia związany był z liczbą makroskopowo obsadzonych stanów w chwili końcowej. W ten sposób na początku symulacji dopuszczono istnienie wielu modów nieklasycznych, które stają się klasyczne w podczas ewolucji układu. Wydaje mi się, że to przybliżenie nie miało większego wpływu na szybkość przejścia atomów do nowego minimum. Przybliżenie to jest dokładniej dyskutowane w rozdziale 4.5.

W **rozdziale piątym** przedstawiłam wyniki symulacji dotyczących interferometru składającego się z dwóch kondensatów w pułapkach, które następnie są łączone. Wyjątkowe w obliczeniach było to, że zostały w nich uwzględnione oddziaływania między atomami, które w większości przypadków są pomijane w opisie teoretycznym interferencji. W symulacjach łączono ze sobą dwa kondensaty o dobrze określonej względnej fazie. Pokazano, że dla pewnych czasów łączenia pułapek oddziaływania prowadzą do podgrzania się układu, a stopień podgrzania układu zależy od różnicy faz między kondensatami. Przez podgrzanie układu zmniejsza się liczba atomów skondensowanych. Najważniejszym wynikiem tych symulacji było pokazanie, że pomiar liczby atomów skondensowanych po połączeniu obu pułapek może być wykorzystany jako sposób mierzenia względnej fazy układów. Wyniki dobrze zgadzają się zarówno ilościowo jak i jakościowo z doświadczeniem [42]. W tych obliczeniach również poczyniłam podobne przybliżenia jak w przypadku symulacji kwantowej destylacji kondensatu

Bosego-Einsteina jednak w przypadku interferometru nie mają one większego znaczenia i wyniki numeryczne dobrze zgadzają się z doświadczeniem [42].

W obu badanych zagadnieniach zaobserwowałam dobrą jakościową zgodność wyników symulacji z wynikami doświadczalnymi. Świadczy to o tym, że metoda pól klasycznych może być z powodzeniem zastosowana do opisu dynamiki zjawisk wielociałowych w ultrazimnych gazach bozonowych. Metoda ta jest łatwa w implementacji numerycznej i można ją stosować dla układów o dowolnej wymiarowości i dla dowolnych kształtów potencjału pułapkującego. Metoda pól klasycznych pozwala na wyjaśnienie wyników eksperymentów i daje wgląd w naturę procesów zachodzących w kondensacie Bosego-Einsteina.

Bibliografia

- [1] K. Góral, M. Gajda, K. Rzążewski, *Opt. Express* **8**, 92 (2001); M. Brewczyk, P. Borowski, M. Gajda, K. Rzążewski, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **37**, 2(rysunek 4.7)725 (2004); M. Gajda, K. Rzążewski, *Acta Phys. Pol.* **100**, 2001, 7-28;
- [2] S. N. Bose, *Z. Phys.* **26**, 178 (1924);
- [3] A. Einstein, *Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.* **1**, 3 (1925); A. Einstein, *Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.* **22**, 261 (1924);
- [4] D. S. Durfee, W. Ketterle, *Opt. Express* **2**, 299 - 313 (1998);
- [5] M. H. Anderson, J. H. Ensher, M. R. Mathews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995);
- [6] K. B. Davies, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995);
- [7] W. Gawlik, W. Jastrzębski, A. Noga, J. Zachorowski, M. Zawada, *Postępy Fizyki* **58**, 156 (2007);
- [8] jila-www.colorado.edu/bec/;
- [9] users.uj.edu.pl/~ufpalasz/mot8.htm;
- [10] A. Migdall, J. Prodan, W. Philips, T. Bergeman, H. Metcalf, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2596 (1985); E. L. Raab, M. Printiss, A. Cable, S. Chu, D. E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2631 (1987); C. Monroe, W. Swann, H. Robinson, C. E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1571 (1990)

- [11] galileo.phys.virginia.edu/research/groups/sackett/research.html;
- [12] I. Bloch, T. W. Hansh, T. Esslinger, *Nature* **403**, 166 (2000);
- [13] M. R. Andrews, C. G. Tausend, H. J. Niesner, D. S. Durfee, D. M. Kurl, W. Ketterle, *Science* **275**, 637 (1997);
- [14] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2496 (1999);
- [15] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G. V. Shlyapnikov, M. Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5198 (1999);
- [16] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin, C. Salomon, *Science* **296**, 1290 (2002);
- [17] L. Deng, E. W. Hagley, J. Wen, M. Trippenbach, Y. Band, P. S. Julienne, J. E. Simsarian, K. Helmerson, S. L. Rolston, W. D. Philips, *Nature* **398**, 218 (1999);
- [18] F. S. Cataliotti, S. Burger, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi, A. Trombettoni, A. Smerzi, M. Ignusci, *Science* **293**, 843 (2001);
- [19] C. A. Regal, M. Greiner, D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040403 (2004);
- [20] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, F. J. Meisner, D. M. Stamper-Kurn, W. Ketterle, *Nature* **396**, 345 (1998);
- [21] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hansch, I. Bloch, *Nature* **415**, 39 (2002);
- [22] N.N. Bogoliubow, *J. Phys. U. S. S. R.* **11**, 23 (1947);
- [23] O. Penrose, L. Onsager, *Phys. Rev.* **104**, 576 (1956);
- [24] K. Góral, M. Gajda, K. Rzażewski, *Phys. Rev. A* **66**, 051602 (2002);
- [25] Ł. Zawitkowski, M. Gajda, K. Rzażewski, *Phys. Rev. A* **74**, 043601 (2006);

- [26] M. Brewczyk, M. Gajda, K. Rzażewski, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **40**, R1-R37 (2007);
- [27] K. Gawryluk, M. Brewczyk, K. Rzażewski, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **39**, L225-L231 (2006);
- [28] E. Witkowska, M. Gajda, J. Mostowski, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **40** 1465 (2007);
- [29] Ł. Zawitkowski, M. Brewczyk, M. Gajda, K. Rzażewski, *Phys. Rev. A* **70**, 033614 (2004);
- [30] E. Witkowska, M. Gajda, K. Rzażewski, *Phys. Rev. A* **79**, 033631 (2009);
- [31] M. J. Davis, S. A. Morgan, K. Burnett *Phys. Rev. Lett* **87**, 160402 (2001); M. J. Davis, S. A. Morgan, *Phys. Rev. A* **68**, 053615 (2003); M. J. Davis, P. B. Blakie, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 10259 (2005);
- [32] A. Sinatra, C. Lobo, Y. Castin, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 210404 (2001); A. Sinatra, C. Lobo, Y. Castin, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **35**, 3599-3631 (2002);
- [33] E. Zaremba, A. Griffin, T. Nikuni *Phys. Rev. A.* **57**, 4695 (1998); T. Nikuni, E. Zaremba, A. Griffin *Phys. Rev. Lett.* **83**, 10 (1999); E. Zaremba, A. Griffin, T. Nikuni *J. Low Temp. Phys* **116**, 277 (1999);
- [34] D. S. Jin, M. R. Matthews, J. R. Ensher, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 764 (1997); B. Jackson, E. Zaremba, *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 180402 (2002);
- [35] Y. Shin, M. Saba, A. Schirotzek, T. A. Pasquini, A. E. Leanhardt, D. E. Pritchard, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 150401 (2004);
- [36] R.J. Donnelly, *Phys. Tod.* **7**, 30 (1995);
- [37] P. Kapitsa, *Nature* **141**, 74 (1938);
- [38] J. F. Allen, A. D. Misener, *Nature* **141**, 75 (1938);

- [39] J. F. Allen, H. Jones, *Nature* **141**, 243 (1938);
- [40] A. Górecka, M. Gajda, *Phys. Rev. A* **79**, 053624 (2009);
- [41] J. Fortagh, C. Zimmermann, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 235 (2007);
- [42] G.-B. Jo, J.-H. Choi, C. A. Christensen, T. A. Pasquini, Y.-R. Lee, W. Ketterle, D. E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 180401 (2007);
- [43] K. Gawryluk, M. Brewczyk, M. Gajda, J. Mostowski *J.Phys.B: At. Mol. Opt. Phys.* **39**, L1 (2006); Y. Kagan, A. E. Muryshev, G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. Lett.* **81**,933 (1998); L. Salasnich, A. Parola, L. Reatto, *Phys. Rev. Lett.* **91**,080405 (2003);