Rower i jego stabilność

Jan Mostowski
Instytut Fizyki, Polska Akademia Nauk
i
Szkoła Nauk /Scisłych
Aleja Lotników 32/46, PL – 02–668 Warszawa

May 20, 1998

1 Wstęp

Rower jest znanym i pojazdem, od ponad stu lat wielu ludzi jeździ na rowerach. Jeżdżenie nie jest łatwe. Wsiadając na rower pierwszy raz w życiu człowiek na ogół nie może utrzymać równowagi i przewraca się. Po krótkim treningu (na ogół w wieku dziecięcym) ludzie uczą się utrzymywać równowagę, umiejętność tę zachowują na ogół do końca życia. Fizyczne zsady utrzymywania równowagi na rowerze nie są całkiem jasne. Wiele tekstów poświęconych rowerom i stabilności ich ruchu opiera się na argumentach podanych po raz pierwszy w książce [3]. Stabilność ruchu roweru przypisana jest tam jadącemu rowerzyście. Ilekroć rower przechyla się, powiedzmy, na lewo rowerzysta skręca kierwonicą również na lewo. Powoduje to, że rower zaczyna poruszać się po kole. Powstająca wówczas siła odśrodkowa działa przeciwnie do siły ciężkości, rower powraca do pozycji pionowej.

Argument przytoczony tutaj zawiera z całą pewnością dużo racji. Eksperymentując z jazdą na rowerze można łatwo przekonać się, że tak właśnie utrzymuje się równowagę jeśli rower jedzie wolno, kilka kilometrów na godzinę (prędkość piechura). Przy szybszej jeździe roweru manewrowanie kierownicą jest zbędne, rower po prostu utrzymuje pozycję pionową i nie wskazuje żadnych tendencji do przewracania się. Nauka jazdy na rowerze polega raczej na zdaniu sobie sprawy ze stabilności pojazdu, pozwoleniu rowerowi na swobodną jazdę, a nie na wykonywaniu ruchów kierownicą aby zapobiec przewracaniu się.

Kwestią stabilności roweru w ruchu zajmowało sie wielu autorów. Jako podstawowy tekst uważa się na ogół książkę [3] z 1948 roku. Znacznie później, w roku 1970 długi i poważny artykuł na temat stabilności roweru napisał David E.H. Jones [2]. Podkreślał on rolę geometrii przedniego widelca w stabilnosći roweru. Dlasze artykuly [4],[5], podają sporo ciekawych uwag, ale zdaniem autora nie doprowadzają rozważań do poziomu dającego jasną analizę stabilnosci (lub niestabilności) ruchu. Wreszcie książka Ernsta [1], stwierdza dość jednoznacznie, że ciągle nie ma jasności jakie siły i w jaki sposób prowadzą do stabilności ruchu roweru. Należy z naciskiem podkreślić, że żaden z wspomnianych artykułów nie przeprowadził pełnej analizy ruchu. Wszystkie one opierają się na półintuicyjnej analizie sił.

Celem tego artykułu jest znalezienie równań ruchu roweru oraz dyskusja ich rozwiązań. Zrobione to zostanie w sposób, stosowany na ogół w zagadnieniach dynamiki. Najpierw zostaną zidentyfikowane zmienne opisujące rower, wyznaczona zostanie funkcja Lagrange'a oraz więzy (tocznie bez poślizgu). Równania Lagrange'a, które wynikają z lagrangeanu, z uwzględnieniem więzów, opisywać będą ruch roweru. Równiania zostaną rozwiązane i przedyskutowane. W szczególności zwrócona zostanie uwaga na zagadnienie stabilności ruchu.

W artykule tym nie uwzględnimy ,,czynnika ludzkiego", czyli dyskusji o tym jak jadący rowerem człowiek wpływa na jego ruch. Człowiek oczywiście pedałuje, co pozwala pokonać opory (przede wszystkim opór powietrza) i utrzymać stałą prędkość. Ponadto człowiek balansuje swoim ciałem oraz kierownicą, co w znaczący sposób wpływa na stabilość roweru. Są to zagadnienia ciekawe, ale nie będą uwzględnione w niniejszej dyskusji. Tak więc artykuł dotyczy jedynie stabilności ruchu samego roweru.

2 Geometria roweru

Rower składa się w z dwóch kół i ramy. Każde koło ma promień r i masę m. Odległość pomiędzy środkami kół (przedniego i tylniego) przy prostej kierownicy wynosi L.

Rozpatrzmy najpierw tylne koło. Położenie punktu styczności koła z płaszczyzna poziomą, po której rower jedzie, oznaczmy przez x_p, y_p. Kąt nachylania płaszczyzny koła do płaszczyzny poziomej oznaczymy przez θ. Przecięcie płaszczyzny koła z płaszczyzną poziomą tworzy prostą, oznaczmy przez ψ kąt, jaki tworzy ta prosta z osią x. Wreszcie przez φ oznaczmy kąt o jaki obraca się koło wokół własnej osi. Te trzy kąty, oraz współrzędne położenia punktu styczności x_p, y_p wyznaczają jednoznacznie położenie tylnego koła. Jest to w sumie pięć stopni swobody.

Warunke tocznie się bez poślizgu nakłada więzy na wymienione współrzędne. Jeśli koło obróci się o (infinitezymalnie mały) kąt $d\varphi$ to współrzędne x_p, y_p zmienią się odpopwiednio o $dx_p = rd\varphi \cos\psi$, $dy_p = rd\varphi \sin\psi$. Należy tu podkreślić, że związki te dotyczą różniczek współrzędnych i nie dają się zapisać jako relacje pomiędzy współrzędnymi. Takie więzy naywają się nieholonomiczne.

W dalszym ciągu ograniczymy się do małych kątów θ i ψ, oznaczmy $\theta = \pi/2 + \xi$. Warunki więzów zapiszemy wtedy:

$$dx_p = rd\varphi \tag{1}$$

$$dy_p = r\psi d\varphi. \tag{2}$$

Będziemy też posługiwali się położeniem środka ciężkości koła. Przy podanych współrzędnych punktu styczności oraz orientacji koła współrzędne środka ciężkości wynoszą: $x_s = x_p - r\cos\theta \sin\psi$, $y_s = y_p + r\cos\theta\cos\psi$. Dla małych kątów ψ i prawie pionowego ustawienia koła ($\xi ll 1$) dostajemy:

$$x_s = x_p \tag{3}$$

$$y_s = y_p - r\xi. \tag{4}$$

Istotna jest też wysokość środka masy nad poziomem płaszczyzny, po której toczy się rower. Wynosi ona: $z_s = r\sin\theta$, co dla małych nachyleń daje: $z_s = r(1 - \xi^2/2)$.

Rozpatrzmy teraz położenie przedniego koła. Jego punkt styczności z płaszczyzna tocznia jest wyznaczony przez położenie tynego koła oraz kąt ψ. Należy zwrócić uwagę, że w normalnym rowerze obrót kierownicy, a zatem zmiana orientacji przedniego koła względem ramy i tylnego koła, nie zmienia odległości pomiędzy punktami styczności kół. Innymi słowy przedłużenie przedniego widelca trafia na punkt styczności przedniego koła z płaszczyzą ruchu. Tak więc współrzędne punktu styczności przedniego koła z płaszczyną ruchy wynoszą: $x_f = x_p + L\cos\psi$, $y_f = y_p + L\sin\psi$, gdzie L oznacza odległośc między kołami. Dla małych kątów ψ dostajemy:

$$x_f = x_p \tag{5}$$

$$y_f = y_p + L\psi. \tag{6}$$

Orientację przestrzenną przedniego koła wyznaczają kąty θ_f, ψ_f oraz φ_f, zdefiniowane tak jak dla tylnego koła. Wartości tych kątów zależą od kątów θ, ψ oraz φ oraz kąta β, o jaki obrócona jest kierownica względem ramy. Zależność tych kątów jest dość zawiła. Ograniczymy się do podania tych zależności jedynie dla małych kątów. Jak widać z rysunku:

$$\psi_f = \psi - \beta\cos\alpha, \tag{7}$$

$$\xi_f = \xi - \beta\sin\alpha. \tag{8}$$

Kąt α oznaczą kąt nachylenia osi obrotu kierownicy względem ramy i pokazany jest na rysunku. Przy takiej interpretacji kąt α jest ujemny i wynosi około -70^0.

Tak więc widzimy, że położenie roweru zdefiniowane jest przez siedem zmiennych: pięć współrzędnych opisujących położenie tylnego koła oraz dwie dodatkowe opisujące koło przednie - kąt skręcenia kierownicy β i kąt obrotu przedniego koła wokół osi koła φ_f. Na te siedem współrzędnych nałożone są więzy opisujące toczenie się obu kół bez poślizgu. Dla tylnego koła zostały one już napisane, dla przedniego koła są one analogiczne:

$$dx_f = r d\varphi_f \tag{9}$$

$$dy_f = r\psi_f d\varphi_f. \tag{10}$$

3 Lagrangean i więzy

Aby znaleźć równania ruchu konieczne jest wyznaczenie funkcji Lagrangea. Do jej wyznaczenia konieczna będzie znajomość energii kinetycznej i potencjalnej roweru, czyli układu kół i ramy. Zacznijmy od energii kinetycznej tylnego koła. Wektor prędkości kątowej w układzie nieruchomym wynosi:

$$\omega = \dot\psi\vec{e_z} + (\dot\varphi + \xi\dot\psi)\vec{e_1} + \dot\xi\vec{e_2}, \tag{11}$$

a zatem energia kinetyczna ruchu obrotowego koła dana jest wzorem:

$$E_r = \frac{1}{2}[I_1(\dot{\varphi}^2 + 2\xi\dot{\varphi}\dot{\psi}) + I_2(\dot{\xi}^2 + \dot{\psi}^2)], \tag{12}$$

gdzie I_1 oznaczaj moment bezwładności względem osi prostopadłej do jego płaszczyzny, a I_2 - moment bezwładności względem osi leżącej w płaszczyźnie koła. Obie osie muszą przechodzić przez środek koła. Energia kinetyczna ruchu postępowego wynosi:

$$E_{CM} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_t^2 + \dot{y}_t^2) \tag{13}$$

gdzie x_t, y_t oznaczają współrzędne środka masy koła. Związane są one z współrzędnymi punktu styczności koła z powierzchnią ruchu x_p i y_p relacją: $x_t = x_p$, $y_t = y_p - r\xi$ (są to oczywiści relacje słuszne dla małych kątów). Wysokość środka masy na powierzchnią ruchu wynosi $r(1 - \frac{1}{2}\xi^2)$, a więc energia potencjalna tylnego koła wynosi:

$$E_p = mgr(1 - \frac{1}{2}\xi^2). \tag{14}$$

Możemy więc podać funkcję Lagrange'a:

$$L_p = E_r + E_{CM} - E_p. \tag{15}$$

Funkcja Lagrange'w wyrażona jest przez współrzędne uogólnione x_t, y_t, ξ, ψ oraz φ.

Ten sam rachunek prowadzi do funkcji Lagrange'a przedniego koła. Jeśli wyrazić ją w zmiennych x_f, y_f, ξ_f, ψ_f oraz φ_f to ma ona tę samą postać. Jednakże właściwymi zmiennymi opisującymi przednie koło są położenie tylnego koła x_t, y_t, jego orientacja ξ, ψ oraz kąty określające skręcenie kierownicy β i obrót przedniego koła wokół swojej osi φ_f. Zmienne te związane są w następujący sposób:

$$x_f = x_p + L \tag{16}$$

$$y_f = y_p + L\psi - r\xi_f = y_p + L\psi + r\beta\cos\alpha. \tag{17}$$

Korzystając z tych wzorow oraz wzorów jj możemy wyrazić funkcję Lagrange'a przez właściwe zmienne. Dostajemy:

$$L_f = E_{CMf} + E_{rot1} + E_{rot2} - E_{potf}, \tag{18}$$

gdzie:

$$E_{CMf} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_s^2+\dot{y}_s^2+L^2\dot{\psi}^2+r^2\beta^2\cos^2\alpha+2L\dot{y}_s\dot{\psi}+2r\dot{y}_s\dot{\beta}\cos\alpha+2Lr\cos\alpha\dot{\psi}\dot{\beta}), \tag{19}$$

$$E_{rot1} = \frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}_f{}^2+2\xi var\dot{p}hi_f\dot{\psi}-2\beta\cos\alpha var\dot{p}hi_f\dot{\psi}-2\xi\sin\alpha\dot{\varphi}_f\dot{\beta}+2\sin\alpha\cos\alpha\beta\dot{\varphi}_f\dot{\beta}), \tag{20}$$

$$E_{rot2} = \frac{1}{2}I_2(\dot{\xi}^2+\dot{\beta}^2+\dot{\psi}^2-2\cos\alpha\dot{\xi}\dot{\beta}-2\sin\alpha\dot{\psi}\dot{\beta}), \tag{21}$$

$$E_{potf} = \frac{1}{2}mgr(\xi^2-2\xi\beta\cos\alpha+\beta^2\cos^2\alpha). \tag{22}$$

Do funkcji Lagrange'a kół podanej powyżej należy dodać jeszcze funkcje Lagrange'a opisującą ramę roweru. Przyjmijmy, że środek ciężkości ramy wypada w odległości D od punktu styczności tylnego koła z powierzchnią ruchu wzdłuż osi roweru oraz na wysokości H, jeśli rower stoi pionowo. Przy dowolnej orientacji i przechyleniu roweru współrzędne środka masy ramy wynoszą:

$$X_M = x_p + D \tag{23}$$

$$Y_M = y_p + D\psi - H\xi = y_s + r\xi - H\xi + D\psi. \tag{24}$$

Funkcja Lagrange'a ramy wynosi więc:

$$L_{rama} = E_{kinrama} + E_{rotrama} - E_{potrama}, \tag{25}$$

gdzie

$$E_{kinrama} = \frac{1}{2}M(\dot{X_M}^2+\dot{Y_M}^2), \tag{26}$$

$$E_{rotrama} = \frac{1}{2}(J_2\dot{\xi}^2+J_3\dot{\psi}^2), \tag{27}$$

$$E_{potrama} = MgH(1-\frac{1}{2}\xi^2). \tag{28}$$

Zostało tu założone, że osie głowne momentu bezwładności ramy pokrywają się z osiami tylnego koła. Odpowiednie wartości momentów bezwładności oznaczone zostały przez J_2 i J_3.

Wyrażając funkcję Lagrange'a ramy przez zmienne opisujace położenie i orientację tylnego koła dostajemy:

$$E_{kinrama} = \frac{1}{2}M(\dot{x_s}^2+\dot{y_s}^2+D^2\dot{\psi}^2+(r-H)^2\dot{\xi}^2+2D\dot{y_s}\dot{\psi}+2(r-H)\dot{y_s}k\dot{s}i+2D(r-H)\dot{\psi}\dot{\xi}). \tag{29}$$

Uzyskaliśmy więc pełne wyrażenie na funkcję Lagrange'a roweru. Jest ona sumą funkcji Lagrange'a dla przedniego koła, tylnego koła oraz ramy. Jest tam siedem współrzędnych uogólnionych: x_s, y_s, φ, φ_f, ξ, ψ oraz β. Wszystkie te współrzędne mają jasno określony sens fizyczny i geometryczny. Rower opisany jest parametrami. Są to: masa m tylnego i przedniego koła, masa M ramy, momenty bezwładności I_1 i I_2 kół oraz J_2 i J_3 ramy, długość roweru L, położęnie środka ciężkości ramy D (w poziomie) i H (w pionie). Niesłuchanie ważnym parametrem charakteryzującym rower jest też kąt α określający nachylenie przedniego widelca. Przypomnijmy, że rozpatrujemy tylko taką konstrukcję przedniego widelca, że przedłużenie widelca trafia na punkt styczności przedniego koła i płaszczyzny ruchu.

Pozostają do rozpatrzenia więzy jakim poddany jest rower w trakcie ruchu. Zakładamy, że oba koła toczą się bez poślizgu. Oznacza to, że dal tylnego koła spełnione są równania:

$$dx_p = rd\varphi \tag{30}$$

$$dy_p = r\psi d\varphi \tag{31}$$

$$dx_f = rd\varphi_f \tag{32}$$

$$dy_f = r\psi_f d\varphi_f. \tag{33}$$

Zależnośći te należy wyrazić przez współrzędne uogólnione występujące w funkcji Lagrange'a. Dostajemy wówczas:

$$dx_s = rd\varphi \tag{34}$$

$$dy_s = r\psi d\varphi \tag{35}$$

$$rd\varphi = rd\varphi_f \tag{36}$$

$$Ld\psi + \beta \sin\alpha dx_s = 0. \tag{37}$$

Na uwagę zasługują dwa ostatnie równania. Pierwsze z nich mówi, że w przybliżeniu małych kątów szybkość kątowa przedniego i tylnego koła są równe. Druga zaś mo/wi, ze skręcenie kierownicy o kąt β prowadzi do powstania zmiany kierunku ruchu roweru, czyli kąta ψ. Należy też zwrócić uwagę, że przedstawione równania więzów zawierają różniczki zmiennych i nie wszystkie z nich dają się wyrazić przez zależności pomiędzy samymi zmiennymi. A zatem przedstawione więzy są nieholonomiczne. Rower jadący bez poślizgu stanowi więc przykład układu o nieholonomicznych więzach. Jest to zapewne przyczyna, dla której w literaturze brak jest głębszej dyskusji ruchu roweru. Układy z więzami nieholonomicznymi są bowiem słabo znane.

4 Równania ruchu

Układy z więzami nieholonomicznymo można badać w sposób zbliżony do układów z więzami holonomicznymi. Więzy prowadzą do powstania sił reakcji więzów, które są prostopadłe do (lokalnych) powierzchi więzów. Siły reakcji opisywać można poprzez mnożniki Lagrange'a, wyrażające te siły. Ich wartosci oblicza się z warunku, że układ stale znajduje się na (lokalnej) powierzchi więzów. Więcej o układach z więzami nieholonomicznymi można znaleźć w książce [6]. Funkcja Lagrange'a wraz z równaniami więzów prowadzi do siedmiu równań na siedem współrzędnych uogólnionych i czterech mnożników Lagrange'a. Układ siedmiu równań Lagrange'a drugiego rodzaju uzupełniony jest czterema równaniami więzów. W sumie mamy więc jedenaście równań i jedenaście niewiadomych. Równania te podane są w Dodatku 1. Większość równań jest bardzo prosta i daje się rozwiązać algebraicznie. Pozostają trzy niebanalne równania na trzy zmienne: ξ, β oraz φ:

$$\ddot{\varphi} = 0, \tag{38}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}(2I_2 + J_2 + mr^2 + MH^2) - \ddot{\beta}(I_2 + mr^2)\cos\alpha \\ +\dot{\beta}\sin\alpha\dot{\varphi}(I_1 + MDHr/L + mr^2) \\ +\beta\sin\alpha\dot{\varphi}^2(2I_1 + MHr + 2mr^2)r/L \\ -\xi(2mgr + MgH) \end{aligned}$$

$$= 0,$$

$$\begin{aligned}\ddot{\beta}(I_2 + mr^2\cos^2\alpha) - \ddot{\xi}\cos\alpha(I_2 + mr^2) + \\ -\dot{\xi}I_1\sin\alpha\dot{\varphi} + \\ -\dot{\beta}(mLr\cos\alpha - I_2\sin\alpha)r/L\dot{\varphi}\sin\alpha + \\ -\beta(I_1 + mr^2)r/L\dot{\varphi}^2\sin\alpha\cos\alpha + \\ +mgr\xi\cos\alpha - mgr\beta\cos^2\alpha = \\ = 0.\end{aligned}$$

Tak więc ruch roweru opisany jest przez tzy równania rówżniczkowe drugiego rzędu. Pierwsze z nich można rozwiązać bardzo łatwo:

$$\varphi = \Omega t + \varphi(0), \tag{39}$$

gdzie Ω i $\varphi(0)$ są stałymi całkowania. Rozwiąznie to mówi, że tylne koło toczy się jednostajnie, a zatem cały rower porusz się ruchem jednostajnym ze stałą prędkością $v = r\Omega$. Wstawiając wartość $dot\varphi$ do pozostałych dwóch równań uzyskujemy układ dwóch równań różniczkowych drugiego rzędu o stałych współczynnikach opisujących ruch roweru.

W dotępnej literaturze równania te nie zostały podane (przynajmniej autor nic o tym nie wie). Najbardziej zbliżone równania podane są w pracy [4], używane tam półintuicyjne argumenty nie biorą pod uwagę faktu, że obrót kierownicą powoduje obrót przedniego koła wokół osi nie przechodzącej przez środek symetrii.

5 Rozwiązanie równań ruchu

Równania roweru można rozwiązć numerycznie. R/wnania roweru są to dwa równania różniczkowe drugiego rzędu. Są one równoważne czterem równaniom różniczkowym pierwszego rzędu. Można je zapisać w postaci:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{4} A_{i,j}x_j, \tag{40}$$

gdzie $i = 1, \ldots, 4$, $x_1 = \xi$, $x_2 = \dot{\xi}$, $x_3 = \beta$, $x_4 = \dot{\beta}$. Macierz $A_{i,j}$ ma dość zawiłą postać i jest podana w Dodatku. Rozwiązania układu równań liniowych są wyznaczone przez wartości własne macierzy $A_{i,j}$. Znaleźione zostały przez numeryczną diagonalizację macierzy $A_{i,j}$. Wyniki podane są na wykresach.

Każdy rower charakteryzuje się parametrami. W rachunkach numerycznych użyliśmy następujących wartości wielkości określających rower:

- masa koła: $m = 1$ kg
- masa ramy: $M = 10$ kg
- promień koła: $r = 0.36$ m (to odpowiada standartowemu kołu 26" używanego w rowerach górskich
- długość roweru: $L = 1.1$ m
- położenie środka masy: H = 0.8 m, D = 0.55 m
- momenty bezwądności: $I_1 = mr^2$, $I_2 = \frac{1}{2}I_1$ for the wheels, $J_2 = 0$ for the frame
- przyspieszenie ziemskie: $g = 10ms^{-2}$

Wartości kąta α określających geomterię przedniego widelca były zmieniane.

Na wykresie 3 przedstawione zostały wartości wąsne macierzy $A_{i,j}$ w funkcji prędkości kątowej Ω. Wartości własne są liczbami zespolonymi, część urojona wyznacza częstości małych drgań, części rzeczywiste dają szybkość wzrostu lub zaniku amplitudy drgań. Jeśli choc jedna z wartości własnych ma dodatnią część rzeczywistą to układ jest niestabilny.

Widzimy z wykresów, że dla małych szybkości roweru, $\Omega < 7s^{-1}$ diwe z wartości własnych mają dodatnie części rzeczywiste. Odpowiada to za nistabilność roweru przy małych szybkościach. Jest to zgodne z oczekiwaniem, przy niewielkiej prędkości rower jest niestabilny.

Dla większych prędkości, $\Omega > 7s^{-1}$ trzy wartości własne mają ujemne części rzeczywiste. jednakże czwarta wartość własna ma dodatnią część rzeczywistą. Pokazuje to, że rower bez rowerzysty nie jest stabilny przy żadnej prędkości. Rower musi przewrócić się. Ta dodatnia wartość własna nie jest duża, mniejsza niż $0.8s^{-1}$ i zmnijesza się przy większych prędkościach. Tak więc rower staje się przwie stabilny.

Dla ujemnych prędkości kątowych, czyli przy jeździe do tyłu rower jest niestabilny.

6 Dodatek 1. Pełny układ równań roweru

W Dodatku tym podajemy pełny układ równań roweru. Są to równania Lagrange'a drugiego rodzaju z uwzględnionymi równaniami więzów. Więcej o tych równaniach można znaleźć w książkach [6], [7], [8]. Rozważmy układ o N stopniach swobody, niech $q_1, \ldots, q_N$ oznaczają współrzędne uogólnione. Układ poddany jest K więzom zapisanym w postaci:

$$\sum_{j=1}^{N} f_{i,j}(q_1, \ldots, q_N) dq_j = 0 \tag{41}$$

dla $i = 1, \ldots, K$. Tutaj dq_j oznaczają różniczki zmiennych q_j.

Niech $L(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N)$ oznacza funkcję Lagrange układu. Równania Lagrange'a drugiego rodzaju przybierają postać:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = T_i \tag{42}$$

gdzie

$$T_i = \sum_{j=1}^{K} \lambda_j f_{i,j}(q_1, \ldots, q_N) \tag{43}$$

a λ_j oznaczają mnożniki Lagrange'a. Są one wyznaczane z równań 41 podzielonymi przez dt:

$$\sum_{j=1}^{N} f_{i,j}(q_1, \ldots, q_N) \frac{dq_j}{dt} = 0. \tag{44}$$

A zatem układ opisany jest przez $N + K$ równań: N równań Lagrange'a (42) i K równań więzów (44).

W przypadku roweru nakreślona procedura prowadzi do jedenastu równań. Siedem pierwszych to równania Lagrange'a:

$$(2m+M)\ddot{x}_s = \lambda_1 + \lambda_2\psi - \lambda_4\beta \tag{45}$$

$$(2m+M)\ddot{y}_s + (mL+MD)\ddot{\psi} + M(r-H)\ddot{\xi} + mr\cos\alpha\ddot{\beta} = \lambda_1\psi - \lambda_2 \tag{46}$$

$$I_1\ddot{\varphi} = -\lambda_1 r + \lambda_3 r \tag{47}$$

$$I_1\ddot{\varphi}_f = -\lambda_3 r \tag{48}$$

$$\begin{gathered}(mL^2+MD^2+2I_2)\ddot{\psi} + (mL+MD)\ddot{y}_s + MD(r-H)\ddot{\xi} + I_2\sin\alpha\ddot{\beta} + \\ I_1(\dot{\xi}\dot{\varphi}_f + \xi\ddot{\varphi}_f + \dot{\xi}\dot{\varphi} + \xi\ddot{\varphi}) - I_1\cos\alpha(\beta\ddot{\varphi}_f + \dot{\beta}\dot{\varphi}_f) = \lambda_4 L\end{gathered} \tag{49}$$

$$\begin{gathered}(2I_2 + M(r-H)^2)\ddot{\xi} + M(r-H)\ddot{y}_s + MD(r-H)\ddot{\psi} - I_2\cos\alpha\ddot{\beta} + \\ I_1\sin\alpha\dot{\varphi}_f\dot{\beta} - I_1\dot{\psi}(\dot{\varphi} + \dot{\varphi}_f) - (2mgr + MgH)\xi = -\lambda_2 r\end{gathered} \tag{50}$$

$$\begin{gathered}(I_2 + mr^2\cos^2\alpha)\ddot{\beta} - I_2\cos\alpha\ddot{\xi} + (mLr\cos\alpha - I_2\sin\alpha)\ddot{\psi} + \\ +mr\cos\alpha\ddot{Y}_s + I_1\ddot{\varphi}_f(\sin\alpha\cos\alpha\beta - \sin\alpha\xi) + I_1\sin\alpha\dot{\varphi}_f(\dot{\beta}\cos\alpha - \dot{\xi}) + \\ +I_1\cos\alpha\dot{\varphi}_f\dot{\psi} + mgr\cos\alpha(\xi - \beta\cos\alpha) = 0.\end{gathered} \tag{51}$$

Następne cztery równania określają więzy:

$$\dot{x}_s - r\dot{\varphi} = 0 \tag{52}$$

$$\dot{y}_s - r\dot{\varphi}\psi + r\dot{\xi} = 0 \tag{53}$$

$$r(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_f) = 0 \tag{54}$$

$$L\dot{\psi} + \dot{x}_s\beta\sin\alpha = 0. \tag{55}$$

Aby uzyskać trzy równania roweru należy z podanego wyżej układu wyeliminować algebraicznie mnożniki Lagrange'a $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$, a następnie zmienne $x_p, y_p, \varphi_f, \psi$.

7 Dodatek 2. Macierz równań roweru

W Dodatku tym podamy wyrażenie na macierz $A_{i,j}$ występującą w równaniu (40). Odpowiada ona równaniom (39, 39). Równania te mają ogólną postać:

$$c_{1,1}\ddot{\xi} + c_{1,2}\ddot{\beta} = b_{1,1}\xi + b_{1,2}\dot{\xi} + b_{1,3}\beta + b_{1,4}\dot{\beta} \tag{56}$$

$$c_{2,1}\ddot{x}i + c_{2,2}\ddot{\beta} = b_{2,1}\xi + b_{2,2}\dot{\xi} + b_{2,3}\beta + b_{2,4}\dot{\beta}, \tag{57}$$

gdzie:

$$c_{1,1} = 2I_2 + J_2 + mr^2 + MH^2 \tag{58}$$

$$c_{1,2} = -(I_2 + mr^2)\cos\alpha \tag{59}$$

$$c_{2,1} = (I_2 + mr^2\cos^2\alpha \tag{60}$$

$$c_{2,2} = -\cos\alpha(I_2 + mr^2) \tag{61}$$

$$b_{1,1} = -(2mgr + MgH) \tag{62}$$

$$b_{1,2} = 0 \tag{63}$$

$$b_{1,3} = \sin\alpha\dot{\varphi}^2(2I_1 + MHr + 2mr^2)r/L \tag{64}$$

$$b_{1,4} = \sin\alpha\dot{\varphi}(I_1 + MDHr/L + mr^2) \tag{65}$$

$$b_{2,1} = mgr\cos\alpha \tag{66}$$

$$b_{2,2} = I_1\sin\alpha\dot{\varphi} \tag{67}$$

$$b_{2,3} = (I_1 + mr^2)r/L\dot{\varphi}^2\sin\alpha\cos\alpha - mgr\cos^2\alpha \tag{68}$$

$$b_{2,4} = (mLr\cos\alpha - I_2\sin\alpha)r/L\dot{\varphi}\sin\alpha). \tag{69}$$

Rozwiązując układ równań (56,57) względem $\ddot{\xi}$ i $\ddot{\beta}$ dostajemy równania (40) i jawną postać macierzy $A_{i,j}$.

References

[1] Krzysztof Ernst, Fizyka sportu, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1992

[2] David E.H. Jones, Physics Today, vol. 23, no 4, page 34 (1970)

[3] S. Timoshenko, D.H. Young, Advanced Dynamics, McGraw-Hill, New York, page 239 (1948)

[4] Daniel Kirshner, Some nonexplanations of bicycle stability, American Journal of Physics, vol. 48, no 1., page 34 (1980)

[5] J. Lowell, H.D. McKell, The stability of bicycle, American Journal of Physics, vol. 50, no 12, page 1106 (1982)

[6] Grzegorz Białkowski, Mechanika klasyczna, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1975, page 183

[7] L.A. Pars, A treatise o analytical dynamics, J.Wiley and Sons, New York 1965.

[8] E.T. Whittaker, A treatise on analytical dynamics of particles and rigid bodies with an introduction to the problem of three bodies, Cambridge University Press, 1952.