

Karol I. Wysokiński

Instytut Fizyki UMCS
Lublin

Tomasz Dietl

Instytut Fizyki PAN
Warszawa

Calkowity i ułamkowy kwantowy efekt Halla

Integer and Fractional Quantum Hall Effect

Abstract: The paper gives a review of recent Hall measurements in high-mobility two-dimensional electron systems at low temperatures and in intense magnetic fields. These measurements show quantization of the Hall resistivity at integer and fractional occupations of the Landau levels. The current status of the theory is discussed in some details. The main attention is focussed on the physical reasons which may lead to the extremely high precision of the quantization observed in the experiment.

1. Wstęp

Już od ok. stu lat wiadomo, że przyłożenie pola magnetycznego do materiału, przez który płynie prąd elektryczny, powoduje powstanie pola elektrycznego prostopadłego do kierunku wektora gęstości prądu elektrycznego. Efekt Halla, bo taką nazwę nosi omawiane zjawisko, od wielu lat stanowi główną metodę opisu podstawowych cech przewodników, gdyż z reguły powstałe pole elektryczne w prosty sposób wiąże się z koncentracją nośników prądu i ich ładunkiem q ($q = \pm e$ odpowiednio dla dziur i elektronów). W szczególności, dla próbki o kształcie prostopadłościanu, stosunek napięcia Halla U_y do prądu elektrycznego I_x (tzw. opór Halla R_{yx}) określa wyrażenie:

$$R_{yx} = \frac{U_y}{I_x} = \frac{B}{qN_s} \quad (1)$$

gdzie B jest składową pola magnetycznego prostopadłą do powierzchni xy , a N_s liczbą nośników prądu na jednostkę powierzchni w tej płaszczyźnie (rys. 1a).

Znajomość N_s oraz składowej diagonalnej R_{xx} tensora oporu pozwala na wyznaczenie

ruchliwości nośników prądu μ zgodnie ze znanym wyrażeniem

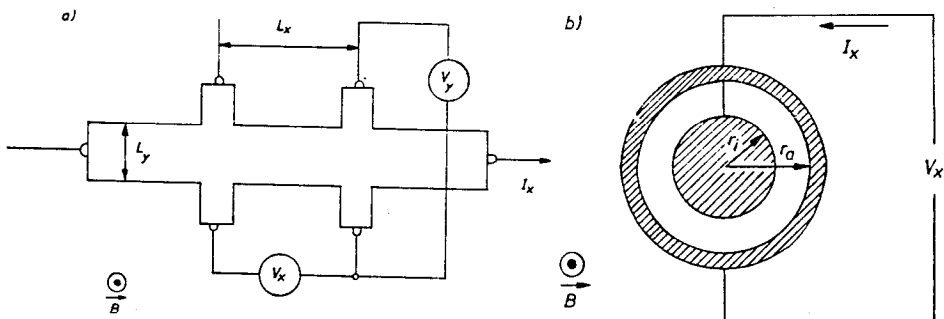
$$R_{xx} = \frac{U_x}{I_x} = \frac{L_x}{e\mu N_s L_y}, \quad (2)$$

gdzie L_x i L_y , jak pokazano na rys. 1a, oznaczają odpowiednio odległość między sondami i szerokość próbki.

Jednym z najbardziej zaskakujących osiągnięć fizyki doświadczalnej ostatnich lat jest wykazanie, że w pewnych warunkach R_{yx} przyjmuje wartości skwantowane

$$R_{yx} = \frac{h}{qen} = \pm \frac{h}{e^2 n} \approx \pm \frac{25812.8}{n} \Omega, \quad (3)$$

gdzie h jest stałą Plancka, a n jest bądź liczbą całkowitą (1, 2, 3...), bądź wymierną o nieparzystych mianownikach (1/3, 2/3, 4/3, ..., 1/5, 2/5, ...). W pierwszym przypadku mówimy o całkowitym kwantowym efekcie Halla (IQHE), w drugim zaś o ułamkowym kwantowym efekcie Halla (FQHE).



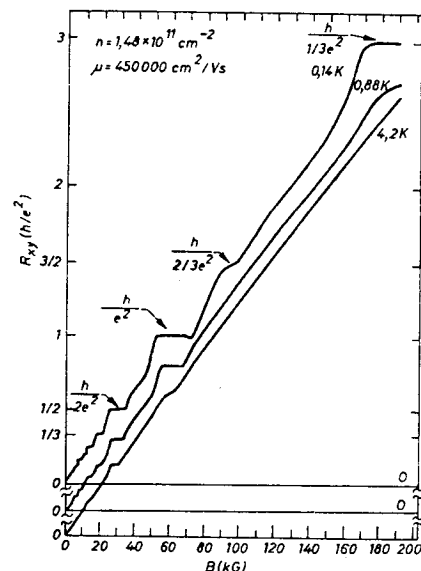
Rys. 1. Geometria próbki przy pomiarach: a) składowych R_{xx} i R_{xy} tensora oporu elektrycznego, b) składowej σ_{xx} tensora przewodnictwa elektrycznego (zaciemniono obszar wdyfundowanych kontaktów).

Zależność R_{xy} od pola magnetycznego w heterostrukturze GaAs-Al_{0.3}Ga_{0.7}As dla różnych temperatur przedstawia rys. 2. W wysokich temperaturach, tj. $T > 4.2$ K, R_{xy} rośnie liniowo z polem magnetycznym, przy czym R_{xy}/B , zgodnie ze wzorem (1), określone jest przez koncentrację elektronów N_s . W niższych temperaturach, $T \lesssim 4.2$ K, oraz w odpowiednio silnych polach magnetycznych i w próbkach o dużej ruchliwości w zależności $R_{xy}(B)$ pojawiają się charakterystyczne załamania przechodzące w odpowiednio niskiej temperaturze w *plateau*. Wartość R_{xy} w obszarze *plateau* opisuje dokładnie wyrażenie (3), niezależnie od np. wymiarów geometrycznych próbki.

Plateau w zależności $R_{xy}(B)$ obserwowane były w tzw. strukturach MOS (metal-tlenek-półprzewodnik) od połowy lat siedemdziesiątych [1]. Istniały też przesłanki teoretyczne [2], że R_{xy} może opisywać wyrażenie (3) z całkowitym n . Uważano jednak, że podobnie jak w innych sytuacjach w fizyce ciała stałego, na wyniki doświadczalne wpływa szereg

niekontrolowanych efektów (np. kontakty, defekty, ...). Ponadto istniejąca teoria [2] zbudowana została przy wielu założeniach upraszczających. W związku z tym nie spodziewano się zgodności teorii z wynikami doświadczalnymi lepszej od powiedzmy 10%.

Pierwszym fizykiem, który podjął precyzyjne pomiary R_{xy} w obszarze *plateau* dla różnych próbek, był Klaus von Klitzing [3]. Wyniki jego eksperymentów wykazywały, że równanie (3) jest spełnione z dokładnością do błędu eksperymentalnego, który w pierwszych doświadczeniach von Klitzinga z 1980 r. wynosił 10^{-3} %.



Rys. 2. Zależność oporu Halla R_{xy} od pola magnetycznego B w heterostrukturze GaAs-AlGaAs w różnych temperaturach [4].

Ułamkowy kwantowy efekt Halla został wykryty w 1982 r. przez D. C. Tsui i współpracowników [4]. Motywem prowadzenia pomiarów $R_{xy}(B)$ przez grupę z laboratoriów Bella był wcześniej wykryty całkowity efekt Halla oraz spodziewana kondensacja Wignera gazu elektronowego w odpowiednio silnych polach magnetycznych. Nie było wówczas żadnych teoretycznych sugestii dotyczących możliwości istnienia ułamkowej kwantyzacji.

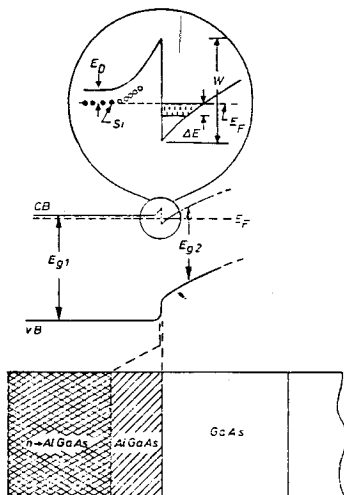
W artykule tym omówimy warunki, przy spełnieniu których obserwuje się kwantowy efekt Halla oraz zreferujemy najbardziej interesujące z dotychczas uzyskanych wyników doświadczalnych. Wspomnimy także o znaczeniu kwantowego efektu Halla w metrologii. Znaczna część artykułu poświęcona jest omówieniu istniejących teorii zjawiska. Wiele uwagi poświęcono fizycznym przyczynom mogącym prowadzić do tak dużej precyzji kwantowania R_{xy} .

Dodajmy, że kwantowemu efektowi Halla poświęcono już szereg artykułów przeglądowych [5–11], w tym krótki artykuł w *Postęпах Fizyki* [12].

2. Warunki obserwacji i wyniki doświadczalne

Do najbardziej znanych układów, w których obserwuje się kwantowy efekt Halla należą tranzystory krzemowe z izolowaną bramką typu MOS-FET oraz heterostruktury GaAs-AlGaAs. O wykorzystaniu tranzystorów MOS-FET do pomiarów kwantowego efektu Halla była mowa wcześniej [12], tutaj omówimy budowę modulacyjnie domieszkowanej heterostruktury GaAs-AlGaAs [9].

Przedstawiona na rys. 3 heterostruktura GaAs-AlGaAs składa się z warstw GaAs $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ i $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}:\text{Si}$ ($x \approx 0.3$, $N_D \approx 10^{18} \text{ cm}^{-3}$). Warstwy te nakłada się metodą wiązek molekularnych (MBE) na półizolacyjne podłoże z GaAs:Cr. Ponieważ dno pasma



Rys. 3. Schemat modulacyjnie domieszkowanej heterostruktury GaAs- $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$. Zaznaczono: przerwę energetyczną w GaAs (E_0) i AlGaAs (E_{01}); położenie poziomu Fermiego (E_F); położenie poziomu domieszkowego Si w AlGaAs (E_{Si}) oraz podpasma elektrycznego w GaAs (ΔE) [9].

przewodnictwa w GaAs leży niżej niż w AlGaAs, elektrony z donorów krzemowych przechodzą do GaAs. Ze względu na przyciąganie kulombowskie elektronów przez zjonizowane domieszki, elektrony pozostają przy międzypowierzchni GaAs i AlGaAs. Efektywny potencjał $V(z)$ w obszarze przypowierzchniowym ma kształt trójkątnej studni potencjału i prowadzi do skwantowania ruchu elektronów w kierunku prostopadłym do międzypowierzchni, a więc do powstania stanów związanych (tzw. podpasma elektrycznych). Odległości między podpasmami elektrycznymi są rzędu kilkudziesięciu meV. Dla typowych koncentracji elektronów na jednostkę powierzchni w płaszczyźnie międzypowierzchni, $N_S \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$, obsadzone jest tylko najniższe podpasmo. W niskich temperaturach elektrony, które pozostały w AlGaAs:Si, wymrożone są na donorach. Wówczas jedynym przyczynkiem do przewodnictwa elektrycznego heterostruktury pochodzi od elektronów w GaAs. Ruch tych elektronów ma charakter kwaziswobodny jedynie w płaszczyźnie

międzypowierzchni. Z tego względu gaz elektronów w GaAs jest układem dwuwymiarowym. Stanowi on obiekt badań w pracach poświęconych kwantowemu efektowi Halla.

Zjawiska przenoszenia (transportu) ładunku w układach dwuwymiarowych w polu magnetycznym opisuje *tensor* przewodnictwa $\hat{\sigma}$ lub odwrotny do niego tensor oporności $\hat{\rho}$ o wymiarach 2×2 . Jak wiadomo, tensor $\hat{\rho}$ określa związek między wektorem pola elektrycznego a wektorem gęstości prądu elektrycznego, $E = \hat{\rho}j$. Ponieważ w układach dwuwymiarowych gęstość prądu elektrycznego jest równa stosunkowi prądu elektrycznego do szerokości próbki, składowe tensora $\hat{\rho}$ mają wymiar oporu.

W próbkach o geometrii hallowskiej (rys. 1a) związek między tensorem oporu \hat{R} a tensorem oporności $\hat{\rho}$ ma postać

$$U_x/I_x \equiv R_{xx} = \rho_{xx}L_x/L_y,$$

$$U_y/I_x \equiv R_{yx} = \rho_{yx},$$

przy czym $\rho_{yy} = \rho_{xx}$ oraz $\rho_{xy} = -\rho_{yx}$.

Tensor przewodnictwa wiąże się z tensorem oporności zależnościami

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}, \quad \sigma_{xy} = \frac{\rho_{yx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}.$$

Wielkość σ_{xx} można wyznaczyć bezpośrednio z doświadczenia w próbkach o kształcie tzw. dysku Corbino (rys. 1b)

$$\sigma_{xx} = \frac{I_x}{2\pi V_x} \ln \frac{r_o}{r_i}.$$

Bardzo ważną cechą heterostruktur GaAs-AlGaAs, istotną nie tylko dla kwantowego efektu Halla, ale także z punktu widzenia zastosowań do szybkich urządzeń przełączających, jest duża ruchliwość elektronów w dwuwymiarowej warstwie. Małe rozpraszanie na zjonizowanych domieszkach osiąga się umieszczając między GaAs i AlGaAs:Si cienką (ok. 200 Å) warstwę niedomieszkowanego AlGaAs. Obecność tej warstwy ma na celu przestrzenne odseparowanie elektronów i zjonizowanych domieszek. Ponadto dobre dopasowanie stałych sieci GaAs i AlGaAs prowadzi do małej gęstości defektów na międzypowierzchni. Również małe znaczenie ma rozpraszanie stopowe, gdyż funkcja falowa elektronów w GaAs ma tylko niewielki „ogon” w AlGaAs. Teoretyczne oszacowania sugerują, że ruchliwość w heterostrukturze może sięgać $6 \cdot 10^6 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ [49]. Obecnie otrzymuje się już struktury z ruchliwością ponad $10^6 \text{ cm}^2/\text{Vs}$ w temperaturze 1.5 K [20, 22, 23].

Istnieje szereg metod pozwalających na „sterowanie” koncentracją N_S . Dla przykładu, przyłożenie napięcia między kanał przewodzący w GaAs, a podłoże lub AlGaAs:Si zmienia potencjał $V(z)$, a więc i N_S . Podobny efekt uzyskuje się przez odpowiednie oświetlenie bądź przyłożenie ciśnienia hydrostatycznego [9].

Zależność energii od wektora falowego w układach dwuwymiarowych ma postać

$$E(k) = E_0 + \hbar^2(k_x^2 + k_y^2)/2m^*, \quad (4a)$$

gdzie E_0 jest położeniem podpasma elektrycznego, k_x i k_y są składowymi wektora falowego w płaszczyźnie międzypowierzchni, m^* jest masą efektywną nośników (założono, że pasmo przewodnictwa jest sferyczne i paraboliczne).

W obecności pola magnetycznego prostopadłego do międzypowierzchni następuje pełna kwantyzacja gazu elektronowego

$$E(n) = E_0 + (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c \pm \frac{1}{2}\hbar\omega_s, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (4b)$$

gdzie $\hbar\omega_c$ jest rozszczepieniem cyklotronowym, a $\hbar\omega_s$ rozszczepieniem spinowym. Jak wiadomo, bez względu na szczegóły zależności $E(k)$, każdy poziom Landaua jest ze względu na liczbę kwantową k_x SeB/h-krotnie zdegenerowany, gdzie S jest powierzchnią próbki. Gęstość stanów stanowi zespół funkcji δ scentrowanych wokół energii $E(n)$. W zerowej temperaturze liczbę obsadzonych poziomów Landaua określa więc wyrażenie

$$\nu = hN_S/eB. \quad (5)$$

Zwróćmy uwagę, że pełna kwantyzacja widma elektronowego jest cechą szczególną układów dwuwymiarowych w polu magnetycznym i stanowi podstawowy warunek obserwacji kwantowego efektu Halla.

W rozważaniach, które doprowadziły nas do równań (4) zaniechaliśmy obecność defektów struktury krystalicznej. Potencjał rozpraszający $V(r)$ prowadzi do poszerzenia rozproszeniowego podpasm elektrycznych. Poszerzenie Γ jest rzędu średniej amplitudy fluktuacji potencjału $V(r)$. Wielkość Γ można oszacować z ruchliwości elektronów μ zgodnie z wyrażeniem

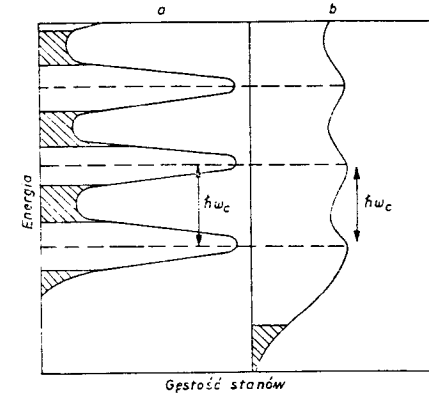
$$\Gamma \simeq e\hbar/\mu m^*. \quad (6)$$

Jeśli odległość między podpasмами elektrycznymi δE jest mniejsza od ich poszerzenia Γ , gaz elektronowy zatracą dwuwymiarowy charakter gdyż możliwe stają się przejścia między poszczególnymi podpasmami, a więc ruch elektronu w kierunku z (funkcja falowa każdego podpasma ma maksima przy innej wartości z).

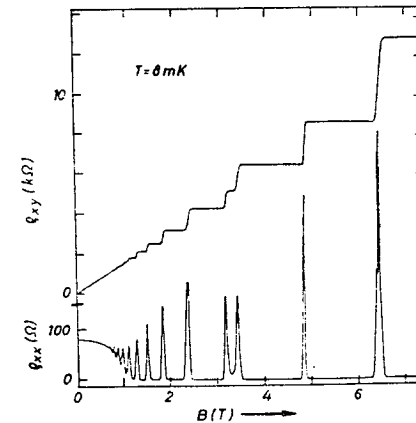
W przypadku heterostruktur GaAs-AlGaAs poszerzenie rozproszeniowe jest znacznie mniejsze od odległości między podpasmami elektrycznymi lub, co jest równoważne, droga swobodna elektronu jest znacznie dłuższa od szerokości studni potencjału $V(z)$. Warunek dwuwymiarowości jest więc w tej strukturze bardzo dobrze spełniony.

W obecności pola magnetycznego i potencjału $V(r)$ gęstość stanów dwuwymiarowego gazu elektronowego przestaje być zespołem funkcji δ , a przyjmuje kształt naszkicowany na rys. 4. Rozmycie poziomów Landaua określa w pierwszym przybliżeniu wyrażenie (6), chociaż w ogólności Γ jest funkcją pola magnetycznego. W przypadku gdy $\Gamma > \hbar\omega_c$, pole magnetyczne słabo zaburza gęstość stanów. W tym obszarze ρ_{xx} praktycznie nie zależy od pola magnetycznego B , a ρ_{xy} rośnie liniowo z B . Dla próbki, dla której wyniki przedstawiono na rys. 5, odpowiada to polom mniejszym od ok. 1 T. Zwiększanie pola magnetycznego prowadzi do wyostrzenia się maksimów gęstości stanów oraz do przechodzenia kolejnych poziomów Landaua przez poziom Fermiego. Widoczne na rys. 5 dla $B \gtrsim 1$ T maksima ρ_{xx} odpowiadają przechodzeniu kolejnych maksimów gęstości stanów przez poziom Fermiego gdyż wtedy rozpraszanie elektronów jest największe. Między maksimami ρ_{xx} obserwuje się minima ρ_{xx} , które są tym głębsze im niższa jest temperatura T i silniejsze pole magnetyczne B .

Zależność $\rho_{xx}(T)$ w polach, w których poziom Fermiego znajduje się w minimach gęstości stanów jest bardzo ciekawą i istotną z punktu widzenia kwantowego efektu Halla własnością układów dwuwymiarowych. Stwierdzono, że w odpowiednio silnych polach



Rys. 4. Schemat zależności jednoelektronowej gęstości stanów od energii dla dwuwymiarowego gazu elektronowego w polu magnetycznym: a) energia cyklotronowa $\hbar\omega_c$ większa od średniej amplitudy fluktuacji potencjału, Γ ; b) $\Gamma > \hbar\omega_c$. Zaciemniono obszar stanów zlokalizowanych.



Rys. 5. Całkowity kwantowy efekt Halla w heterostrukturze GaAs-AlGaAs o koncentracji $N_s = 4.2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ i ruchliwości $\mu = 1.8 \cdot 10^5 \text{ cm}^2/\text{Vs}$. Dla pól mniejszych od 3 T rozszczepienie spinowe jest mniejsze od amplitudy fluktuacji potencjału, Γ i nie obserwuje się rozszczepień spinowych [13].

magnetycznych i niskich temperaturach ρ_{xx} staje się mniejsze od dokładności nawet najbardziej precyzyjnych eksperymentów. Zerowa wartość ρ_{xx} oznacza, że nie ma spadku napięcia w kierunku prądu elektrycznego. Jest to oznaką braku dysypacji energii w układzie (gęstość mocy M prądu elektrycznego określa znane wyrażenie $M = j \cdot E$). Ten zaskakujący wynik eksperymentu staje się zrozumiały jeśli zauważyć, że potencjał $V(r)$ może prowadzić do przestrzennej lokalizacji funkcji falowej w obszarze małej gęstości stanów (rys. 4). Elektrony w przestrzennie zlokalizowanych stanach nie przewodzą prądu elektrycznego w $T = 0$ K. Wtedy jedyny przyczynek do prądu elektrycznego pochodzić może od elektronów znajdujących się w stanach rozciągniętych (zdelokalizowanych) pod

poziomem Fermiego. Ruch tych elektronów zachodzi pod wpływem wzajemnie prostopadłego pola elektrycznego (pola Halla) $E = (0, E_y, 0)$ i pola magnetycznego $B = (0, 0, B)$. (Przypomnijmy, że w przybliżeniu klasycznym elektron porusza się po cykloidzie w kierunku prostopadłym zarówno do E jak i B). Elektrony dryfują bez rozproszeń, bo w okolicy stanów przewodzących nie ma stanów nieobsadzonych, do których mogłoby nastąpić rozproszenie.

Tego rodzaju układ przewodzący mógłby więc zasługiwać na miano idealnego przewodnika. Jednakże oporność $\rho_{xx} = 0$ tylko w temperaturze zera w skali bezwzględnej. W każdej innej temperaturze ρ_{xx} jest różne od zera, choć bardzo małe. Do dysypacyjnego transportu ładunku w $T > 0$ mogą prowadzić dwa procesy [13–15]. Po pierwsze, indukowane fononami przeskoki elektronów z okolicy poziomu Fermiego (przewodnictwo *hoppingowe* między stanami zlokalizowanymi). Po drugie, przewodnictwo elektronów termicznie aktywowanych z poziomu Fermiego do wyżej leżących stanów rozciągniętych. W tym ostatnim przypadku $\rho_{xx}(T) \approx \rho_{xx}^0 \exp(-\Delta/kT)$, gdzie $\Delta \lesssim \hbar\omega_c/2$ ($\Delta \approx \hbar\omega_c/2$, gdy poziom Fermiego leży dokładnie w połowie odległości między maksimami gęstości stanów).

Jak widać na rys. 5, w obszarze, w którym $\rho_{xx} \approx 0$, ρ_{xy} nie zależy od pola magnetycznego i przyjmuje wartości skwantowane, $\rho_{xy} = h/e^2 n$, gdzie n jest liczbą poziomów Landaua znajdujących się pod poziomem Fermiego. Stwierdzono [25, 26, 74], że dokładność kwantyzacji jest tym większa im mniejsza jest wartość ρ_{xx} w obszarze *plateau*. Opisuje to empiryczny wzór [74] $\rho_{xy} - h/e^2 n = -s\rho_{xx}$, gdzie $s \approx 0.1 - 0.4$.

Składowe tensora oporności w warunkach kwantowego efektu Halla możemy wyznaczyć w prostym ujęciu półklasycznym. (Bardziej realistyczne modele teoretyczne znajdzie czytelnik w części teoretycznej artykułu.)

Siła działająca na każdy elektron znajdujący się w stanie rozciągniętym wynosi

$$F = q(E + v \times B),$$

przy czym ze względu na bezdysypacyjny charakter transportu pominieliśmy człon rozproszeniowy. W warunkach stacjonarnych $F = dv/dt = 0$, a więc dla $B = (0, 0, B)$ oraz $vqN_s = j = (j_x, 0, 0)$ otrzymujemy

$$E_x = 0, \quad E_y = \frac{B}{qN_s} j_x,$$

gdzie N jest ilorazem liczby stanów rozciągniętych i tej powierzchni próbki, która daje przyczynek do transportu ładunku. Stąd

$$\rho_{xx} = 0, \\ \rho_{xy} = -B/qN_s.$$

Jeśli pod poziomem Fermiego znajduje się n zajętych pasm Landaua ze stanami rozciągniętymi, to, zgodnie ze wzorem (5), $N_s = neB/h$. Otrzymujemy ostatecznie $\rho_{xy} = R_{xy} = -h/qen$, a więc zgodnie z wynikami doświadczalnymi R_{xy} nie zależy od wymiarów geometrycznych i pola magnetycznego.

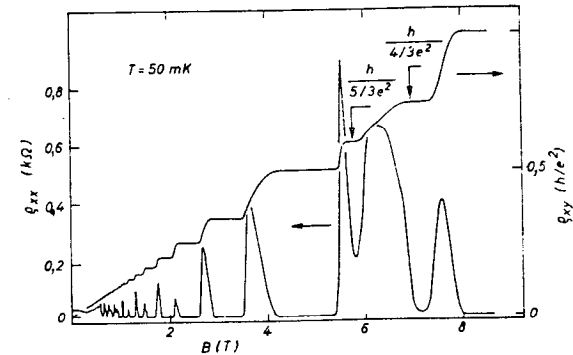
Podkreślmy, że powyższe wyrażenia na ρ_{xx} i ρ_{xy} są słuszne jedynie w polach magnetycznych, w których poziom Fermiego znajduje się w obszarze stanów zlokalizowanych.

W przeciwnym razie $\rho_{xx} \neq 0$, a $\rho_{xy} = \rho_{xy}(B)$ gdyż wzrost pola magnetycznego w wyrażeniu na siłę Lorentza nie jest kompensowany przez wzrost liczby nośników na stanach rozciągniętych: stany te przy wzroście pola magnetycznego „wychodzą” nad poziom Fermiego.

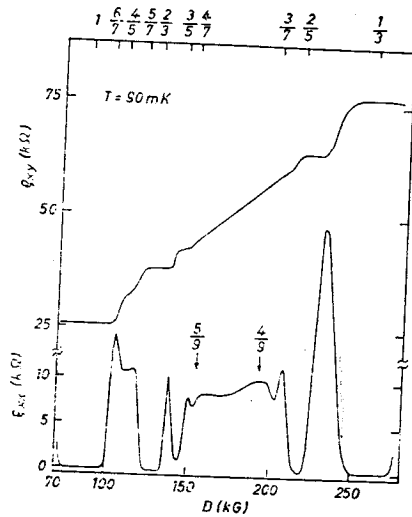
Pewnej informacji o stosunku liczby stanów rozciągniętych i zlokalizowanych dostarcza stosunek szerokości maksimów ρ_{xx} do szerokości *plateau* ρ_{xy} . Dla próbki przedstawionej na rys. 5, stosunek ten jest bardzo mały. Świadczy to o tym, że tylko niewielka część stanów na poziomach Landaua jest rozciągnięta.

W dotychczasowych rozważaniach pomijaliśmy spin elektronu. Jeżeli rozszczepienie spinowe jest mniejsze od Γ , między spinowo rozszczepionymi poziomami Landaua nie ma stanów zlokalizowanych i w obszarze *plateau* $\rho_{xy} = h/e^2 p$, gdzie p jest liczbą parzystą (patrz rys. 5). W ogólnym przypadku możemy napisać $\rho_{xy} = h/e^2 gn$, gdzie g jest iloczynem degeneracji poziomów Landaua i ilości warstw dwuwymiarowych dających przyczynek do transportu ładunku. Dla przykładu, w tranzystorach krzemowych MOS-FET $g = 4$ (spin i dwie doliny). Z kolei w heterostrukturach GaAs-AlGaAs typu p $g = 1$ [21]. Wynika to ze zniesienia sześciokrotnej degeneracji pasma walencyjnego przez kombinacje oddziaływań $k \cdot p$, spin-orbita oraz przypowierzchniowego pola elektrycznego [9]. W dwuwymiarowym gazie elektronowym na granicach ziaren w InSb stwierdzono, że $g = 4$ [17]. Ponieważ dla pasma przewodnictwa w InSb degeneracja wynosi 2 (spin), przyjęto [17], że gaz dwuwymiarowy na granicy ziaren znajduje się w dwóch równoległych studniach potencjału. Widzimy więc, że kwantowy efekt Halla stanowi użyteczne narzędzie do badania struktury układów dwuwymiarowych.

Na rys. 6 przedstawiono wyniki pomiarów ρ_{xx} i ρ_{xy} w heterostrukturze GaAs-AlGaAs o ekstremalnie wysokiej ruchliwości elektronów $\mu \sim 10^6$ cm²/Vs [23]. Duża ruchliwość, a więc małe fluktuacje potencjału $V(r)$ prowadzą do większej szerokości pików ρ_{xx} i mniejszej szerokości *plateau* ρ_{xy} . W próbce tej jest więc więcej stanów rozciągniętych. Najbardziej ciekawą cechą wyników przedstawionych na rys. 6 i 7 jest obecność minimów ρ_{xx} i *plateaux* ρ_{xy} przy częściowym zajęciu poziomów Landaua. Dla próbki z rys. 7 [22] anomalie występują, gdy najniższy spinowy poziom Landaua jest obsadzony w 1/3, 2/3, 2/5 i 3/5. Słabsze struktury widać także przy $\nu = 3/7, 4/7, 4/9$ i $5/9$. Z kolei w próbce



Rys. 6. Całkowity i ułamkowy kwantowy efekt Halla w heterostrukturze GaAs-AlGaAs o koncentracji $N_s = 2.3 \cdot 10^{11}$ cm⁻² i ruchliwości $\mu = 10^6$ cm²/Vs [23].



Rys. 7. Uławkowy kwantowy efekt Halla w heterostrukturze GaAs-AlGaAs o koncentracji $N_s = 2.13 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ i ruchliwości $\mu \approx 5 \cdot 10^5 \text{ cm}^2/\text{Vs}$. W przedstawionym zakresie pól magnetycznych elektrony znajdują się na najniższym poziomie Landaua [22].

z rys. 6 widać *plateaux* ρ_{xy} i minima ρ_{xx} gdy najniższy poziom spinowy jest całkowicie obsadzony, a wyższy obsadzony jest w $1/3$ i $2/3$.

Ponieważ uławkowej kwantyzacji nie udaje się opisać w ramach modelu jednoelektronowego powszechnie uważa się, że uławkowy kwantowy efekt Halla wynika z oddziaływania kulombowskiego elektron-elektron. W fenomenologicznej interpretacji zjawiska przyjmuje się, że przy uławkowym obsadzeniu poziomów Landaua pojawia się przerwa energetyczna δ . Przerwa ta oddziela wieloelektronowy stan podstawowy od najniższej leżących stanów wzbudzonych. Potencjał $V(r)$, podobnie jak w przypadku całkowitego efektu Halla, prowadzi do pojawienia się pewnej liczby stanów w przerwie. Jeśli jednak fluktuacje potencjału są na tyle małe, że $\delta > \Gamma$ stany w przerwie są, przynajmniej częściowo, nieprzewodzące w $T = 0 \text{ K}$. Wówczas dla $kT < \delta$ obserwuje się minima ρ_{xx} oraz *plateaux* ρ_{xy} .

Informacje o wielkości przerw dostarczają pomiary $\rho_{xx}(T)$ w obszarze minimów, gdzie $\rho_{xx}(T) = \rho_{xx}^0 \exp(-\delta/2kT)$. Stwierdzono [20, 22, 23], że δ jest rzędu 1 K, rośnie z polem magnetycznym i zależy od ν . Omawiana w części teoretycznej teoria Laughlina [9, 81] przewiduje występowanie przerw dla $\nu = n_1/n_2$ gdzie n_2 jest liczbą nieparzystą oraz podaje wielkości przerw dla $\nu = 1/3$ i $2/3$, $\delta \approx 0.026e^{5/2}B^{1/2}/\hbar^{1/2} \epsilon$, gdzie ϵ jest stałą dielektryczną półprzewodnika. Wyliczony z teorii Laughlina parametr δ jest co do rzędu wielkości zgodny z doświadczeniem, chociaż sama teoria, o czym wspominamy dalej, budzi szereg kontrowersji.

Całkowity kwantowy efekt Halla obserwowano już dla wielu struktur półprzewodnikowych. Poza omawianymi już tranzystorami krzemowymi MOS-FET [3,26] i heterostrukturami GaAs-AlGaAs [13, 14] wymienić można heterostruktury InGaAs-InP [15], tzw. studnie kwantowe typu GaSb-InAs-GaSb [16], granice ziaren w InSb [17], a nawet organiczne półprzewodniki w dużej anizotropii przewodnictwa [18].

Dokładność z jaką w obszarze plateau ρ_{xy} nie zależy od B a ρ_{xx} jest równe zero związana jest z jakością materiału (ruchliwością) oraz z zakresem pól magnetycznych i temperatur, w jakich prowadzono poszczególne eksperymenty. Istotny wpływ na zależność $\rho_{xx}(B)$ i $\rho_{xy}(B)$ może mieć także struktura podpasem elektrycznych. Dla przykładu, autorzy pracy [17] wiążą duże wartości ρ_{xx} w obszarze *plateau* ρ_{xy} z faktem, że na granicy ziaren w InSb elektrony obsadzają co najmniej dwa podpasma elektryczne (podobna sytuacja ma miejsce na granicy ziaren w $\text{Hg}_{1-x}\text{Mn}_x\text{Te}$ [19]).

Uławkowy kwantowy efekt Halla obserwuje się w wielu laboratoriach na świecie. Interesujące jest, że jak dotychczas na Zachodzie i w Japonii zaobserwowano go wyłącznie w heterostrukturach GaAs-AlGaAs [4, 20, 22, 23]. Z kolei, w Związku Radzieckim dwie grupy donoszą [24] o obserwacji efektu w tranzystorach krzemowych MOS-FET. Ruchliwość elektronów w tranzystorach osiągała $4 \cdot 10^4 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, tj. była około 2—3 krotnie wyższa niż tranzystorów MOS-FET, którymi dysponują laboratoria pomiarowe na Zachodzie i w Japonii. Jak wiadomo, tranzystory MOS-FET stanowią podstawowy element układów o dużej skali integracji....

Z powyższej dyskusji i przedstawionych wyników doświadczalnych wypływa wniosek, że obserwacja kwantowego efektu Halla była możliwa dzięki postępowi w technologii materiałowej (w tym technologii wysokiej próżni), technice wysokich pól magnetycznych i niskich temperatur. Współautorami typowej pracy doświadczalnej o kwantowym efekcie Halla są specjaliści wymienionych dziedzin, a prace powstają przy współpracy wielu specjalistycznych laboratoriów, w tym laboratoriów o charakterze międzynarodowym (jak np. laboratorium silnych pól magnetycznych w Grenoble [23] i we Wrocławiu [17]).

3. Zastosowanie w metrologii

Znaczenie kwantowego efektu Halla w metrologii wynika z dwóch powodów. Po pierwsze, dzięki temu efektowi możemy uzyskać opór odniesienia. Efekt ten może nawet być wykorzystany do zbudowania „atomowego” wzorca Ohma (podobnie jak zjawisko Josephsona może być użyte do budowy „atomowego” wzorca Volta). Po drugie, $R_{xy} = h/e^2n$ wiąże się w prosty sposób ze stałą struktury subtelnej α ,

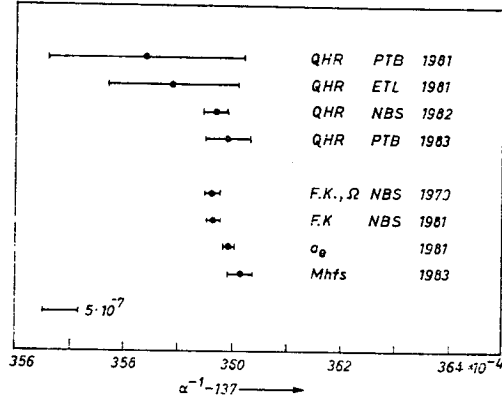
$$\alpha^{-1} = \frac{2h}{\mu_0 c e^2} = \frac{2n}{\mu_0 c} R_{xy}, \quad (7)$$

gdzie μ_0 jest przenikalnością magnetyczną próżni, a c prędkością światła. Jak wiadomo μ_0 i c mają w układzie jednostek SI dokładnie określone wartości. Jak wynika z równania (7) dokładność wyznaczenia α jest więc równa dokładności wyznaczenia wartości R_{xy} w obszarze *plateau* (jeśli nie ma zjawisk zaburzających drugą równość we wzorze (7)).

Po odkryciu całkowitego kwantowego efektu Halla, szereg laboratoriów podjęło precyzyjne pomiary R_{xy} w krzemowych tranzystorach typu MOS-FET oraz w heterostrukturach z GaAs-AlGaAs. Okazuje się, że w pierwszym przypadku bardzo precyzyjne pomiary R_{xy} w obszarze *plateau* są możliwe dla $n = 4$, w drugim dla $n = 2$. Z pomiarów tych, prowadzonych w polach magnetycznych rzędu 10 T, wynika, że nie ma zależności $R_{xy}n$ od materiału, n oraz temperatury (w obszarze $1 \lesssim T \lesssim 4 \text{ K}$) z odchyleniem standardowym

rzędu 10^{-8} [25, 26]. Ponieważ liczba ta jest około 10 razy mniejsza od dokładności i stabilności najlepszych obecnie stosowanych oporów odniesienia wydaje się, że całkowity efekt Halla może już być obecnie używany jako wysokostabilny opór odniesienia.

Na rys. 8 przedstawiono wyniki pomiarów stałej α otrzymane w różnych laboratoriach na świecie. Jak widać, wartość α wyznaczona z kwantowego efektu Halla jest zgodna z wynikami uzyskanymi przy pomocy innych metod. Głównym źródłem błędu jest obecnie niepewność stosunku laboratoryjnych oporów odniesienia do oma w układzie SI.



Rys. 8. Porównanie wyników pomiarów stałej struktury subtelnej α metodą kwantowego efektu Halla (QHR) z innymi metodami znanymi z elektrodynamiki kwantowej. Poszczególne pomiary wykonano w RFN (PTB), Japonii (ETL) i USA (NBS) [26].

Stwierdzono również, że w przypadku ułamkowego efektu Halla równanie (7) spełnione jest także z dużą dokładnością, a mianowicie z dokładnością $3 \cdot 10^{-5}$ dla $n = \frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$ oraz ok. 10^{-3} dla $n = \frac{2}{5}$ i $\frac{3}{5}$ [22].

Powyższe eksperymenty sugerują, że kwantowy efekt Halla jest nieczuły, z dokładnością lepszą od 10^{-7} , na obecność domieszek, defektów, kontaktów, skończonych wymiarów próbek, strukturę energetyczną materiału, itp. W dalszej części artykułu przedstawiamy modele teoretyczne podejmujące próbę uzasadnienia tego wyniku doświadczalnego.

4. Dwuwymiarowy gaz elektronowy w silnym polu magnetycznym

Z elementarnej elektrodynamiki wiemy, że pole magnetyczne B opisuje się za pomocą potencjału wektorowego A , przy czym $B = \text{rot } A$. Potencjał A określony jest z dokładnością do gradientu dowolnej funkcji skalarnej $\chi(r)$. Tę dowolność wyboru A wynikającą z tego, że zarówno A jak i $A' = A + \nabla\chi(r)$ prowadzi do tej samej wartości pola magnetycznego B nazywamy cechowaniem. Tu oraz poniżej rozważamy przypadek stacjonarny, stąd brak zależności od czasu t .

Równanie Schrödingera mające dla elektronu w zewnętrznym polu magnetycznym B

i elektrycznym E postać

$$\left\{ \frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla + eA)^2 - eE \cdot r + V(r) \right\} \Psi(r) = \varepsilon \Psi(r), \quad (8)$$

pozostaje niezmiennicze ze względu na cechowanie jeżeli jednocześnie ze zmianą $A(r)$ na $A'(r) = A(r) + \text{grad } \chi(r)$ zmienimy $\Psi(r)$ na

$$\Psi'(r) = e^{-ie\chi(r)/\hbar} \Psi(r). \quad (9)$$

Zmiana cechowania zmienia czynnik fazowy funkcji falowej. Jest to bardzo istotny moment naszych rozważań, gdyż traktowany zwykle jako „nieistotny” czynnik fazowy odgrywa tu ważną, jak się przekonamy, rolę.

Chodzi mianowicie o warunki brzegowe. Jeżeli funkcja $\psi(r)$ spełnia na brzegu obszaru pewne warunki, to w ogólności funkcja $\psi'(r)$ nie spełnia tych samych warunków i nie może więc być rozwiązaniem problemu. Chyba że zachodzi jedna z dwu możliwości. Albo funkcja $\Psi(r)$ zdąży do zera, gdy r zmierza do brzegu, albo faza $e\chi(r)/\hbar$ jest równa 2π razy liczba całkowita, gdyż wtedy funkcje są identyczne na brzegu i mogą spełniać te same warunki brzegowe. Zachodzenie pierwszej z możliwości oznacza, że taka funkcja falowa jest nieczuła na warunki brzegowe. Ta własność funkcji falowych stała się jednym z kryteriów podziału funkcji (a więc i stanów) na *zlokalizowane* — nieczułe na zmianę warunków brzegowych, mające niezerową amplitudę w niewielkim obszarze przestrzeni, oraz *rozciągłe* — czułe na zmianę warunków brzegowych i posiadające niezerową amplitudę w całym rozważanym obszarze, a więc i na brzegu [36]. Zmiana cechowania, prowadząca do zmiany warunków brzegowych nie jest więc w ogólności dozwolona dla stanów rozciąglących.

Na zakończenie przypominamy rozwiązanie równania Schrödingera [8] dla elektronu swobodnego, $V(r) = 0$ w dwu wymiarach. Rozwiązanie problemu trójwymiarowego można znaleźć np. w pracy [27]. Dla ustalenia uwagi wybierzmy potencjał A w postaci $A = -B(y+a, 0, 0)$. Człon $-Ba\mathcal{L}$ wprowadzamy do potencjału A , aby zobaczyć, w jaki sposób zależą energie własne ε oraz stany własne Ψ od cechowania. Elementarny rachunek dla $E = (0, E_y, 0)$ daje,

$$\Psi_{kn}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{L_x}} e^{ikx} \chi_n((y-y_k-a)/l), \quad (10)$$

gdzie $\chi_n(x)$ jest n -tym stanem własnym liniowego oscylatora harmonicznego, natomiast

$$y_k = l^2(k + mv_D/\hbar); \quad (11)$$

$$v_D = E_y/B; \quad l^2 = \hbar/eB. \quad (12)$$

Energie własne

$$\varepsilon_{nk} = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}) + eE_y(y_k + a) + mv_D^2/2, \quad (13)$$

zależą od pola cechowania a . Interesujące, że bez pola elektrycznego ($E_y = 0$) stany są zdegenerowane ze względu na liczbę kwantową k i energia nie zależy od a . Liczba kwantowa $n = 0, 1, 2, \dots$ numeruje kolejne poziomy Landaua.

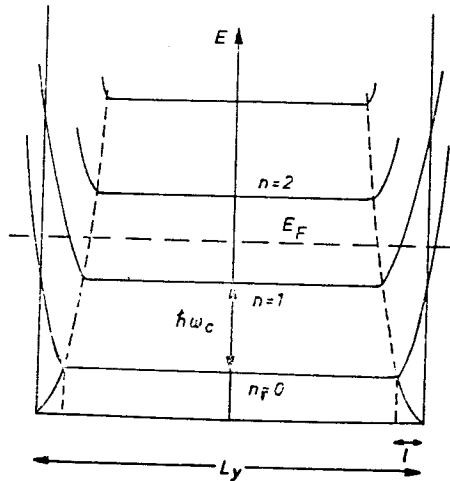
W realnych próbkach, np. Si każdy poziom Landaua jest czterokrotnie rozszczepiony (spin i dwie doliny), jednakże dla prostoty rozważań pominiemy ten efekt przy opisie teoretycznym.

Funkcja falowa (10) opisująca elektron w stanie n, k jest falą płaską w kierunku x , natomiast w kierunku y jest zlokalizowana w obszarze o szerokości l w otoczeniu swego środka ciężkości $y = y_k$, jak łatwo widać ze wzorów (10, 11) dla $a = 0$. Liczba kwantowa k jest wektorem falowym w kierunku x , a jednocześnie określa średnie wartości położenia y oraz energii elektronu w n -tym paśmie Landaua. Narzucenie na funkcję (10) okresowych warunków brzegowych w kierunku x ogranicza dozwolone wartości k do

$$k = 2\pi p/L_x, \quad (14)$$

gdzie p jest liczbą całkowitą. Kolejne wartości k różnią się o $\Delta = 2\pi/L_x$, zaś kolejne dozwolone wartości y dla danego n o $2\pi l^2/L_x$. Ponieważ y zawarte jest w przedziale $\langle 0, L_y \rangle$ więc całkowita liczba dozwolonych wartości k jest równa $L_x L_y / 2\pi l^2$.

Powyższe rozważania, a w szczególności wyrażenia na funkcję (10) oraz energie własne (13) są, ściśle rzecz biorąc, słuszne dla próbki nieskończonej w kierunku y . W rzeczywistości



Rys. 9. Schemat zależności energii poziomów Landaua od parametru y_k (zdefiniowanego w równ. (11)) w próbce o szerokości L_y . Pominięto wpływ pola elektrycznego E_y ; l oznacza długość magnetyczną.

rozmiary próbki są niewielkie $L_y \approx 10^4 l$. Należy więc oczekiwać odstępstw od powyższych zależności przynajmniej dla stanów w pobliżu brzegów próbki, $y = 0$ i $y = L_y$, gdzie występują silne skoki potencjału. Powodują one gwałtowny wzrost energii, proporcjonalny przynajmniej do y^2 w pobliżu brzegów. Na rys. 9 przedstawiony jest schematyczny przebieg pasm energetycznych z uwzględnieniem brzegów. Zaznaczono też położenie poziomu Fermiego E_F , przecinającego pasma w pobliżu brzegów.

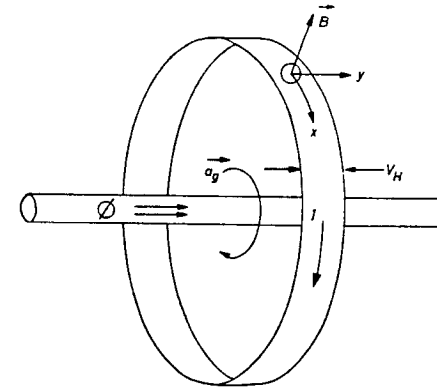
5. Teorie całkowitego kwantowego efektu Halla

Rozpoczynając omawianie teoretycznej strony zjawiska musimy stwierdzić, że mimo wielu sukcesów w zrozumieniu różnych aspektów zagadnienia nie ma w chwili obecnej jednolitej, ogólnie akceptowanej teorii. Co więcej pewne podejścia wydają się być w sprzeczności ze sobą. Istnieją prace objaśniające efekt wyłącznie własnościami stanów brzegowych. Twierdzi się tam m. in., że cały prąd płynie na brzegu [48] (zob. także [42—44]). Nie znana jest rola oddziaływań elektron-elektron w zjawisku z całkowitymi liczbami kwantowymi. Wszystkie dotychczasowe objaśnienia są w zasadzie teoriami w „zerowym przybliżeniu” zaniedbującymi niewielkie lecz mierzalne wartości ρ_{xx} i σ_{xx} . Skończone (niezerowe) wartości ρ_{xx} i σ_{xx} świadczą o dyssypacji w układzie. Występuje ona zawsze w eksperymencie i jest spowodowana nieelastycznymi procesami w niezerowych temperaturach.

W dalszej części artykułu omówimy pokrótce różne podejścia teoretyczne do zjawiska rozpoczynając od całkowitych liczb kwantowych oraz zerowych temperatur.

5.1. Transformacja cechowania

Laughlin [45] (zob. pracę tegoż autora w [9] str. 272) jako pierwszy zauważył związek pomiędzy kwantowaniem oporu Halla, a reakcją stanów na transformację cechowania. Rozważymy pokrótce podejście Laughlina.



Rys. 10. Schemat doświadczenia myślowego Laughlina [45]. Dwuwymiarowy gaz elektronowy znajduje się na powierzchni walca i w polu magnetycznym B . Przez środek walca przechodzi solenoid wytwarzający strumień magnetyczny ϕ i odpowiadający mu potencjał wektorowy a_g .

Wyobraźmy sobie, że długa próbka została zdeformowana w ten sposób, że dwuwymiarowy gaz elektronów znalazł się na powierzchni bocznej walca (rys. 10). Pole magnetyczne B jest prostopadłe, a pole elektryczne E równoległe do powierzchni walca w każdym punkcie. Jeżeli promień walca jest duży, to możemy wprowadzić lokalny kartezjański układ odniesienia, w którym wszystkie wektory mają lokalnie te same składowe co w przypadku płaskim. Wzdłuż osi walca umieszczamy cienki i długi solenoid. Przepływ prądu

przez solenoid powoduje powstanie w jego wnętrzu pola magnetycznego B_θ , którego strumień ϕ przenika przez podstawę walca. Zmiana strumienia ϕ powoduje pojawienie się siły elektromotorycznej indukcji $V_{ind} = -d\phi/dt$. Jeżeli po powierzchni walca płynie prąd I , to układowi zostaje dostarczona na sposób pracy energia $V_{ind}I dt$, zmieniając o tyle energię wewnętrzną układu dU . Stąd

$$I = -\frac{\partial U}{\partial \phi}. \quad (15)$$

Zauważmy, że przepływ strumienia ϕ równoważny jest w geometrii z rysunku (10) transformacji cechowania $A_y \rightarrow A'_y = A_y + a_\theta$. Obliczenie prądu Halla wymaga więc znalezienia zależności energii wewnętrznej układu od pola cechowania a_θ lub strumienia ϕ przez solenoid. Pochodna we wzorze (15) jest różna od zera jedynie wówczas, gdy w układzie istnieją stany rozciągle, gdyż dla stanów zlokalizowanych (jak już mówiliśmy) transformacja cechowania,

$$\Psi(r) \rightarrow \Psi'(r) = \Psi(r)e^{-iea_\theta x/\hbar} = \Psi(r)e^{-i2\pi e\phi x/L_x h}, \quad (16)$$

nie wpływając na warunki brzegowe, nie zmienia energii stanu, $\varepsilon(\Psi) = \varepsilon(\Psi')$ i jest zawsze dozwolona. Dla stanów rozciąglonych taka transformacja w ogólności zmienia warunki brzegowe, a więc i energię chyba że $\phi = \phi_0 \equiv h/e$ lub całkowitej wielokrotności ϕ_0 , gdyż wtedy zarówno $\Psi(r)$, jak $\Psi'(r)$ spełniają cykliczne warunki brzegowe, $\Psi(x, y) = \Psi(x + L_x, y)$. Każda zmiana strumienia o kwant strumienia $\phi_0 = h/e$ prowadzi do wyjściowych warunków brzegowych. Oznacza to periodyczność warunków brzegowych, a także i energii gazu elektronowego w funkcji ϕ_0 (twierdzenie Byersa-Yanga [46]). W warunkach eksperymentu gaz elektronów nie jest układem izolowanym, lecz znajduje się w zewnętrznym polu o różnicy potencjałów równej napięciu Halla V_H . Pole to możemy zasymulować wyobrażając sobie, że dwuwymiarowy gaz elektronów znajduje się w kontakcie z dwoma rezerwuarami elektronów umieszczonymi po obu jego brzegach, których potencjały chemiczne różnią się o eV_H .

Zmiana energii występująca we wzorze (15) jest zmianą energii całego układu (gazu elektronów oraz rezerwuarów). Laughlin pokazuje, że przepływ strumienia ϕ_0 przez solenoid powoduje przemieszczenie się pewnej liczby elektronów z jednego rezerwuaru do drugiego. Zmieni to energię całego układu o $\Delta U = neV_H$. Obliczając w sposób przybliżony pochodną we wzorze (15)

$$I = -\frac{\partial U}{\partial \phi} = -\frac{\Delta U}{\phi_0} = -\frac{neV_H}{h/e} = -n\frac{e^2}{h}V_H, \quad (17)$$

znajdujemy, że oprócz Halla przyjmuje skwantowane wartości

$$\varrho_{xy} = -h/ne^2.$$

Jeżeli pasmo wypełnione jest częściowo, elektrony przemieszczane są do sąsiednich stanów w paśmie, dając do energii układu wkład mniejszy od eV_H , co niweczy kwantowanie. Odpowiada to zmianie ϱ_{xy} pomiędzy kolejnymi wartościami kwantowymi. Istotnym więc warunkiem kwantowania jest, że poziom Fermiego leży w przerwie energetycznej (przerwie ruchliwości).

Do wyjaśnienia pozostaje wpływ domieszek oraz brzegów próbki na wynik powyższego rozumowania, przeprowadzonego w oparciu o funkcję (10). Laughlin argumentuje, że stany brzegowe (rys. 9) są wręcz niezbędne dla stosowalności analizy gdyż zapewniają kontakt gazu z otoczeniem (rezerwuarami).

Wpływ domieszek jest bardziej złożony. Modyfikują one istniejące w układzie stany i powodują powstanie nowych stanów o energiach w przerwie energetycznej pomiędzy poziomami Landaua. Ponieważ jednak są to stany zlokalizowane, więc nie dają wkładu do przewodnictwa. Przerwa ruchliwości istnieje w dalszym ciągu i wynik (17) pozostaje słuszny. Obecność domieszek nie wpływa na symetrię związaną z niezmienniczością układu ze względu na cechowanie (wzór 16) i nie niweczy kwantowania ϱ_{xy} .

Powyższe objaśnienie całkowitego kwantowego efektu Halla uogólniono na przypadek ułamkowego kwantowego efektu Halla [47], zakładając, że stan podstawowy gazu (w częściowo wypełnionym najniższym poziomie Landaua) jest n -krotnie zdegenerowany. Oznacza to, że przepływ przez solenoid strumienia ϕ_0 nie spowoduje powrotu układu do stanu wyjściowego. Dopiero przepływ strumienia $n_2\phi_0$ może ewentualnie powtórzyć stan układu. Jeżeli przy tym n_1 elektronów zostanie przeniesionych pomiędzy rezerwuarami, to $\Delta U = n_1 eV_H$, i

$$\sigma_{xy} = \frac{n_1 e^2}{n_2 h}$$

Następne dwa paragrafy poświęcamy omówieniu kwantowych teorii, szczególnie objaśniających fakt niezależności prądu Halla i ϱ_{xy} od obecności domieszek.

5.2. Teoria rozproszeń — przesunięcia fazowe — kompensacja

Spróbujmy zastanowić się nad zmianą wartości własnych ε_{nk} (13) i funkcji własnych (10), jeżeli w swobodnym gazie elektronów umieścimy domieszkę o potencjale $V(r)$. Stany własne hamiltonianu

$$H = H_0 + V(r) = \frac{1}{2m} [p_x - eB(y+a)]^2 + \frac{1}{2m} p_y^2 - eE_y + V(r),$$

różnią się od stanów (10) szczególnie silnie dla tych wartości wektora falowego k dla których stany (10) mają dużą amplitudę w otoczeniu domieszki. Część z nich ulegnie lokalizacji w otoczeniu domieszki, inne ulegną niewielkiej modyfikacji (stany rozproszeniowe). Energia własna elektronu ε_α w rozproszeniowych (rozciąglonych) stanach α niewiele różni się od energii tychże stanów przed wprowadzeniem domieszki, $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha^0 + \Delta\varepsilon_\alpha^0$. Energie stanów zlokalizowanych będą się znacznie różniły [29]. Poziomy te odszczepiają się od kwazikontinuum (13) i przesuwają się w obszar przerwy ruchliwości. Istotną własnością jest, że ich energia nie zależy od potencjału cechowania a . Pozwala to na łatwe obliczenie wartości prądu Halla w stanie kwantowym α [29]

$$j_\alpha = \frac{1}{B} \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial a} = \frac{1}{B} \frac{\partial \varepsilon_\alpha^0}{\partial a} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Delta\varepsilon_\alpha}{\partial a} = j_\alpha^0 + \frac{1}{B} \frac{\partial \Delta\varepsilon_\alpha}{\partial a}. \quad (18)$$

Stany zlokalizowane, których liczbę oznaczmy N_l nie uczestniczą w przewodnictwie, stąd obliczając całkowity prąd Halla sumujemy po $N - N_l$ rozciągniętych stanach. Jak widać ze wzoru (13), j_α^0 nie zależy od α , więc

$$I = \sum_{\alpha} j_{\alpha} = (N - N_l) j^0 + \frac{1}{B} \sum_{\alpha} \frac{\partial \Delta \varepsilon_{\alpha}}{\partial \alpha} \quad (19)$$

Drugi człon w ostatnim wzorze można łatwo wyliczyć wprowadzając funkcję $\eta(\varepsilon_{\alpha}^0)$ opisującą przesunięcie każdego z poziomów ε_{α}^0 ; $\Delta \varepsilon_{\alpha}^0 = -\eta(\varepsilon_{\alpha}^0)/\pi$. Jest to znana z teorii rozproszonych funkcja przesunięć fazy, związana twierdzeniem Levinsona [50] z liczbą stanów zlokalizowanych przez potencjał $V(\mathbf{r})$. Szczegółowe rachunki [29, 28] pokazują, że drugi składnik w ostatnim wzorze daje dokładnie wartość $N_l j^0$, co oznacza że prąd całkowity $I = I^0 = N_l j^0$.

Prąd Halla jest więc po wprowadzeniu domieszki taki sam jak przed jej wprowadzeniem. Ten sam potencjał $V(\mathbf{r})$, który lokalizuje część stanów wyłączając je z udziału w przewodnictwie, jednocześnie przyspiesza inne (drugi człon we wzorze (18)) nie zmieniając wartości prądu, $I = I_0$. Mamy więc do czynienia ze swoistą kompensacją. Istotnym warunkiem kompensacji jest całkowite wypełnienie pasma stanów przewodzących.

Uogólnienie powyższego wyniku na przypadek dowolnej ilości domieszek można znaleźć w pracach [28-32].

5.3. Formalizm Kubo-Greenwooda

Obliczenia przewodnictwa Halla dwuwymiarowego gazu elektronów dokonane zostały metodą Kubo-Greenwooda [51] w samouzgodnionym przybliżeniu Borna [2] znacznie przed odkryciem kwantowego efektu Halla. Wyniki obliczeń dość dobrze zgadzały się z eksperymentem [52]. Nieoczekiwane odkrycie K. von Klitzinga stało się bodźcem do dokładniejszej analizy formuły Kubo-Greenwooda dla σ_{xy} , a w szczególności wkładu stanów zlokalizowanych.

W pracy [53] wskazano na możliwość odseparowania wkładu $\Delta \sigma_{xy}$ stanów zlokalizowanych do przewodnictwa Halla

$$\sigma_{xy} = -\frac{eN}{B} + \Delta \sigma_{xy}. \quad (20)$$

W ostatnim wzorze N oznacza liczbę wszystkich stanów na jednostkę powierzchni pod poziomem Fermiego. Wkład pojedynczego zlokalizowanego stanu α o energii ε_{α} do członu $\Delta \sigma_{xy}$ jest

$$\Delta \sigma_{xy}^{\alpha} = f(\varepsilon_{\alpha}) e/B,$$

gdzie $f(\varepsilon_{\alpha})$ jest funkcją Fermiego-Diraca. Z obu powyższych wzorów wynikają interesujące własności σ_{xy} w temperaturze $T = 0$ K. σ_{xy} pozostaje stała tak długo jak długo poziom Fermiego leży w obszarze stanów zlokalizowanych, gdyż wkład każdego takiego stanu od pierwszego członu w (20) jest dokładnie kompensowany jego wkładem do $\Delta \sigma_{xy}^{\alpha}$. W szczególności $\sigma_{xy} = 0$, jeżeli wszystkie stany poniżej poziomu Fermiego są zlokalizowane.

Stany rozciągnięte dają wkład tylko do członu eN/B , zwiększając wartość σ_{xy} o e^2/h , gdy poziom Fermiego przejdzie poza kolejne pasmo w obszar przerwy ruchliwości.

Interesujące zastosowania formalizmu Kubo można znaleźć w [54, 55], a także [56], gdzie σ_{xx} i σ_{xy} wyliczono w ramach przybliżenia potencjału koherentnego.

5.4. Teoria przeciekania (perkolacji)

Metody klasycznej teorii perkolacji, właściwie uogólnione, pozwalają na poczynienie nietrywialnych uwag odnośnie zachowania się stanów elektronowych w zewnętrznych polach magnetycznym i elektrycznym oraz w obecności domieszek [57-61]. Pozwalają w szczególności na określenie stopnia lokalizacji stanów i ich względnej ilości.

Rozważmy przypadek stacjonarny bez pola elektrycznego. Stan stacjonarny elektronu o energii ε_{α} opisujemy niezależną od czasu funkcją falową Ψ_{α} . Pomijając dla prostoty rozważań degenerację stwierdzamy, że stany α istnieją na hiperpowierzchni stałej energii $\varepsilon_{\alpha} = \text{const}$. Poza tą hiperpowierzchnią stan α jest niedozwolony i Ψ_{α} zmierza do zera.

W rozważanym przypadku dwuwymiarowym bez domieszek hiperpowierzchnia jest określona wzorem $\varepsilon_{nk} = \text{const}$. Są to więc linie proste o równaniu $y_k = \text{const}$. Funkcja falowa Ψ_{nk} rzeczywiście zanika wykładniczo dla $y \neq y_k$. Jeżeli układ zawiera domieszki o potencjale $V = V(x, y)$, to linie ekwienergetyczne będą krzywymi płaskimi. Dozwolone stacjonarne stany elektronów Ψ_{α} rozciągają się wzdłuż tych krzywych. Amplituda stanu Ψ_{α} szybko maleje w miarę oddalania się od krzywej. Charakterystyczną odległością jest długość magnetyczna l malejąca do zera, gdy pole B wzrasta do nieskończoności. Dla silnych pól można więc stwierdzić, że stan Ψ_{α} istnieje „na linii” ekwipotencjalnej. Rozmiary linii dają informację o rozmiarach, a więc stopniu rozciągniętości stanów. Kształt i rozmiary linii ekwipotencjalnej zależą od potencjału domieszek, podobnie jak topologia linii brzegu morskiego określona jest ukształtowaniem terenu i rzecz jasna poziomem wód. Zmiana poziomu wód (odpowiadająca zmianie energii) wpływa na kształt i długość linii brzegowej (linii ekwipotencjalnej wzdłuż której $|\Psi_{\alpha}| \neq 0$). Przy niskich stanach wód prawie całą „prze-strzeń” wypełnia ląd, a woda zbiera się w jeziorach. Brzegi jezior reprezentujące, w tej analogii, stany elektronowe układu mają niewielkie rozmiary. Stany są więc zlokalizowane. Paradoksalnie, gdy poziom wody jest wysoki wtedy prawie całą przestrzeń wypełnia wszechocean, z którego „wystają” wyspy. Linie woda-ląd odpowiadające dozwolonym stanom mają i w tym przypadku małe rozmiary, reprezentują więc znowu stany zlokalizowane. Gdzieś pomiędzy tymi skrajnymi położeniami istnieje poziom wód (energia), gdy linia brzegu jest bardzo długa (nieskończenie długa w granicy termodynamicznej). Reprezentuje więc stan Ψ , którego amplituda jest niezerowa w całej przestrzeni, stan mogący uczestniczyć w transporcie. Teoria perkolacji stwierdza, że zachowanie się stanów o dużych rozmiarach jest uniwersalne oraz daje oszacowanie rozmiarów tych stanów. Obwód (długość) L stanu o „średnicy” R rośnie jak R^p , $p = 91/48$ (są to więc fraktale).

Przyłożenie zewnętrznego pola elektrycznego (pole Halla w warunkach eksperymentu) powoduje znaczną komplikację zagadnienia. Rozkład stanów ulega drastycznej zmianie. Analiza [61] pokazuje, że część stanów zostaje zdelokalizowana, przy czym procent stanów

rozciągłych wzrasta przynajmniej liniowo z polem. Średnią prędkość elektronu zapiszemy [61]

$$\mathbf{v} = [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}] / B^2, \quad (21)$$

gdzie $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E} + \nabla V(\mathbf{r})/e$ jest lokalną wartością pola elektrycznego. Prąd I_x przepływający przez linię $x = \text{const}$ zapiszemy

$$I_x = e \int_0^{E_y} dy v_x(\mathbf{r}) n \frac{eB}{h} = n \frac{e^2}{h} \left\{ \int_0^{L_y} E dy - \frac{1}{e} [V(x, L_y) - V(x, 0)] \right\}.$$

Wyrażenie w nawiasie klamrowym jest mierzonym w eksperymencie napięciem Halla V_H . Znajdujemy więc, że $\rho_{xy} = V_H / I_x = h / e^2 n$.

Brak miejsca nie pozwala na omówienie całego szeregu innych interesujących metod jak symulacje numeryczne [62-65], metody teorii pola [66-71] czy metody oparte o elektrodynamikę kwantową [88-92].

6. Całkowity kwantowy efekt Halla przy $T \neq 0$ K

Omawiane dotychczas teorie zakładały, że układ znajduje się w temperaturze zera bezwzględnej oraz brak procesów prowadzących do dyssypacji i niezerowych wartości ρ_{xx} i σ_{xx} w warunkach *plateau*. Ponieważ eksperyment zawsze mierzy niezerowe, choć bardzo małe, wartości ρ_{xx} pojawiło się pytanie o mechanizm transportu, gdy poziom Fermiego leży w obszarze stanów zlokalizowanych. Pomiar temperaturowych zależności ρ_{xx} [13, 14] wskazywał, że w najniższych temperaturach mamy do czynienia ze zmiennozasięgowym hoppingiem. Dokładna analiza pokazała, że $\ln [T \sigma_{xx}(T)] \sim (T_0/T)^2$. Zależność tę otrzymano także teoretycznie przy założeniu, że funkcje własne są typu Gaussa [72]. W wyższych temperaturach $\ln \sigma_{xx}(T) \sim -\Delta/kT$. Mamy więc do czynienia z aktywacją, przy czym $\Delta \simeq \hbar \omega_c / 2$. Hopping zmiennozasięgowy daje znacznie mniejszy wkład do σ_{xy} w porównaniu z σ_{xx} [73] i to tłumaczy wyniki eksperymentu [79] nie stwierdzające odstępstw σ_{xy} od zależności aktywacyjnej (por. jednak [74]).

W zastosowaniach kwantowego efektu Halla w metrologii szczególnie ważne jest określenie siły termoelektrycznej i termicznie indukowanych napięć mogących prowadzić do błędów przy określaniu wartości ρ_{xy} [75, 76]. Zarówno eksperyment [75] jak i teoria [77] zgodnie stwierdzają, że siła termoelektryczna S zmierza do zera dla położenia poziomu Fermiego odpowiadających *plateau* na krzywej ρ_{xy} . Obliczenia przeprowadzone w pracy [77] (zobacz także W. Zawadzki w [9], str. 79) pokazują, zgodnie z eksperymentem, że maksymalne wartości siły termoelektrycznej

$$S_{\max} = - \frac{k \ln 2}{e(n + \frac{1}{2})}, \quad (22)$$

traktowane w pracach [54, 76] jako uniwersalne, są ewentualnie osiągalne w granicy

$kT/\Gamma \rightarrow \infty$, tzn. w niskich temperaturach dla parametru rozmycia pasma $\Gamma \rightarrow 0$. (Teoria zaniebuja unoszenie fononowe).

Dokładną analizę termodynamicznych własności dwuwymiarowego gazu elektronów w silnym polu magnetycznym można znaleźć w pracach [9, 77, 78].

7. Teorie ułamkowego kwantowego efektu Halla

Objaśnienie ułamkowego efektu wymaga, aby oddziałujący gaz elektronów posiadał szczególnie niską energię w stanie podstawowym dla pewnych wymaganych eksperymentalnie wartości parametru wypełnienia pasma ν . Pierwsze teorie odwoływały się do fal gęstości ładunku lub tworzenia się kryształu Wignera o określonej symetrii, np. trójkątnej gdy $\nu = \frac{1}{3}$. Obliczenia [80] pokazały jednak, że energia stanu podstawowego jest zbyt wysoka oraz jest ciągłą funkcją parametru ν . Spośród istniejących teorii ułamkowego kwantowego efektu Halla wyodrębnimy dwie grupy różniące się zastosowaną metodą.

Propozycja Laughlina [81] uogólniona w pracach [11, 82, 83] oparta jest na metodzie wariacyjnej. Zaproponował on kształt (wariacyjnej) funkcji falowej i pokazał, że energia stanu podstawowego dwuwymiarowego gazu opisanego tą funkcją jest niższa od energii kryształu Wignera. Oznacza to, że układ wybierze ten stan (posiadający jak się okazało [10] cechy dwuwymiarowej nieściśliwej cieczy kwantowej).

Analiza wzbudzeń elementarnych układu prowadzi do zaskakującego wniosku, że są to cząstki o ładunku ułamkowym $q = \pm e/m$ [81]. Obrazowo mówiąc wzbudzenia te są obszarami cieczy o rozmiarach rzędu długości magnetycznej l o zwiększonej (zmniejszonej) gęstości ładunku. Nadmiar (niedobór) ładunku w tym obszarze $q = -e/m$, jest ładunkiem wzbudzenia kwazicząstkowego (kwazidziurowego).

Pewnym niedostatkim omawianego powyżej podejścia jest brak dowodu, że funkcja Ψ_m daje najniższą energię stanu podstawowego [86]. Dokładna diagonalizacja Hamiltonianu oddziałujących elektronów w polu magnetycznym możliwa jest dla układu kilku (czy najwyżej kilkunastu) elektronów [84]. Nie pozostaje więc nic innego, jak zastosować standardowe metody teorii wielu ciał [85-87]. Taką próbę rzeczywiście podjęto [85]. Kłopoty, które pojawiły się w związku z tym, że oddziaływanie elektron-elektron jest tu jednocześnie zaburzeniem, a zarazem czynnikiem znoszącym degenerację poziomu Landaua, pokonano sumując pewne klasy rozbieżnych diagramów. Otrzymano, że energia układu w stanie podstawowym przyjmuje minimalne wartości, gdy obsadzenie stanów w paśmie wynosi $\nu = 1/m$. Główny wkład do niemonotonicznej zależności energii od parametru wypełnienia pasma ν pochodzi od energii korelacji.

Teoria ta stwierdza [87], że stan układu o $\nu = 1/m$ jest m -krotnie zdegenerowany, oraz na obecnym poziomie zaawansowania nie przewiduje szczególnie niskich energii dla nieparzystych m .

Jedną ze sprzeczności między różnymi pracami teoretycznymi [81, 82] jest rodzaj statystyki (Fermiego, Bosego) wzbudzeń elementarnych. Istnieją poważne argumenty teoretyczne, że statystyka ta jest różna od fermionowej i bozonowej [91, 92]. Zamiana miejscami dwu cząstek prowadzi w *dwu wymiarach w obecności pola magnetycznego* do ciągłej

zmiany fazy funkcji falowej:

$$\Psi(1, 2) = e^{i\theta} \Psi(2, 1). \quad (23)$$

Wartość parametru θ fazy zależy od drogi, względem trzeciej cząstki, na której dokonuje się zamiana $1 \leftrightarrow 2$. Wartość $\theta = 0$ odpowiada bozonom, natomiast $\theta = \pi$ fermionom (spin $\frac{1}{2}$). Nietypowa ułamkowa statystyka wzbudzeń wiąże się dość ściśle z ich ułamkowym ładunkiem [92].

8. Podsumowanie

Kwantowy efekt Halla jest jednym z najbardziej interesujących odkryć fizyki półprzewodników ostatnich lat. Jest on bardzo intensywnie badany zarówno eksperymentalnie, jak i teoretycznie. Zjawisko obserwuje się w coraz większej liczbie struktur i związków. Wspólną cechą wszystkich układów pomiarowych jest dwuwymiarowość gazu nośników. Otrzymanie odpowiednich struktur stawia bardzo wysokie wymagania technologiczne i materiałowe. Do obserwacji zjawiska konieczne są ekstremalnie silne pola magnetyczne oraz bardzo niskie temperatury.

Różnorodne podejścia teoretyczne i brak jedności w interpretacji wyników wynikają ze złożoności zagadnienia. Jest to być może odbiciem znanego matematykom „prawa”, że przestrzenie o parzystej liczbie wymiarów sprawiają zawsze więcej kłopotów. Znaczenie efektu w metrologii, jego nieoczekiwanie wielka dokładność i niewyjaśnione do końca podstawy teoretyczne powodują rosnące zainteresowanie zjawiskiem. Ułamkowy kwantowy efekt Halla staje się poligonem doświadczalnym współczesnych metod teoretycznej fizyki układu wielu ciał.

Wszystko to obiecuje nowe niewątpliwie interesujące wyniki w najbliższej przyszłości. Musimy tu stwierdzić, że już istniejąca literatura jest znacznie obszerniejsza od przytoczonej w niniejszym artykule i w pewnej mierze sprawą subiektywnego odczucia autorów był taki a nie inny wybór literatury i oczywiście omówionych aspektów teorii i eksperymentu.

Artykuł ten został napisany podczas pobytu autorów na Wydziale Fizyki Politechniki Monachijskiej. Autorzy dziękują Profesorom W. Brenigowi, F. Kochowi i K. von Klitzingowi za wiele cennych dyskusji. Jeden z autorów (T. D.) dziękuje Fundacji Humboldta za przyznane stypendium naukowe.

Dodano w korekcie: Klausowi von Klitzingowi została przyznana Nagroda Nobla za 1985 r.

Literatura

- [1] S. Kawaji, J. Wakabayashi, w *Physics in High Magnetic Fields*, Springer Series in Solid State Sciences vol. 24, 284 (1980).
- [2] T. Ando, Y. Matsumoto, Y. Uemura, *J. Phys. Soc. Jpn.* **39**, 279 (1975).
- [3] K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 449 (1980).
- [4] D. C. Tsui, H. L. Störmer, A. C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1559 (1982); D. C. Tsui, H. L. Störmer, J. C. M. Hwang, J. S. Brooks, M. J. Naughton, *Phys. Rev. B* **28**, 2274 (1983).

- [5] K. von Klitzing, w *Festkörperprobleme, Advances in Solid State Physics* vol. XXI, 1 (1981).
- [6] J. J. Quinn, B. D. McCombe, *Comments Solid State Phys.* **10**, 139 (1982).
- [7] M. E. Cage, S. M. Girvin, *Comments Solid State Phys.* **11**, 1, 47 (1983).
- [8] T. Ando, A. B. Fowler, F. Stern, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 457 (1982).
- [9] G. Bauer, F. Kuchar, H. Heinrich, red., *Two-Dimensional Systems, Heterostructures and Superlattices*, Springer 1984.
- [10] *Phys. Today*, June 1981, July 1983.
- [11] B. I. Halperin, *Helv. Phys. Acta* **56**, 75 (1983).
- [12] T. Dietl, *Postępy Fizyki* **33**, 195 (1982).
- [13] G. Ebert, K. von Klitzing, C. Probst, K. Ploog, *Solid State Commun.* **44**, 95 (1982); G. Ebert, K. von Klitzing, C. Probst, E. Shubert, K. Plögg, G. Weimann, *Solid State Commun.* **45**, 625 (1983); G. Ebert, Praca doktorska, Technischen Universität München, 1983.
- [14] D. C. Tsui, A. R. Gossard, *Appl. Phys. Lett.* **38**, 550 (1981); S. Narita, S. Takeyama, W. B. Luo, S. Hayamizu, K. Nanbu, H. Haskimoto, *Jpn. J. Appl. Phys.* **20**, L447 (1981).
- [15] A. Briggs, Y. Guldner, J. P. Hirtz, J. P. Vieren, M. Voos, M. Razeghi, *Phys. Rev. B* **27**, 10 (1983).
- [16] E. E. Mendez, L. L. Chang, C. A. Chang, L. F. Alexander, L. Esaki, *Surf. Sci.* **142**, 215 (1984).
- [17] R. Herrmann, W. Krak, M. Glinski, *Phys. Status Solidi b* **125**, K85 (1984).
- [18] P. M. Chaikin, M. Y. Choi, J. F. Kwak, J. S. Brooks, K. P. Martin, M. J. Naughton, E. M. Eugler, R. L. Greene, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2333 (1983).
- [19] G. Grabecki, T. Dietl, P. Sobkowicz, J. Kossut, W. Zawadzki, *Appl. Phys. Lett.* **46**, 1214 (1984).
- [20] A. M. Chang, M. A. Faalanen, D. C. Tsui, H. L. Stormer, J. C. M. Hwang, *Phys. Rev. B* **28**, 6133 (1983); E. E. Mendez, M. Heiblum, L. L. Chang, L. Esaki, *Phys. Rev. B* **28**, 4886 (1983); S. Kawaji, J. Wakabayashi, J. Yoshino, H. Sakaki, *J. Phys. Soc. Jpn.* **53**, 1915 (1984).
- [21] H. L. Störmer, Z. Schlesinger, A. Chang, D. C. Tsui, A. C. Gossard, W. Wiegmann, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 126 (1983).
- [22] A. M. Chang, P. Berglund, D. C. Tsui, H. L. Störmer, J. C. M. Hwang, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 997 (1984).
- [23] G. Ebert, K. von Klitzing, J. C. Maan, G. Romenyi, C. Probst, G. Weimann, W. Schlapp, *J. Phys. C* **17**, L775 (1984).
- [24] W. M. Pudalov, S. G. Semendinsky, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **39**, 143 (1984); M. G. Gavrilo, Z. D. Kvon, I. V. Kukushkin, V. B. Timofeev, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **39**, 420 (1984).
- [25] D. C. Tsui, A. C. Gossard, B. F. Field, M. E. Lage, R. F. Dziuba, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 3 (1982).
- [26] L. Bliok, E. Braun, F. Melchert, P. Warnecke, W. Schlapp, G. Weimann, K. Ploog, G. Ebert, G. Dorda, *Proc. 17th International Conference on Low Temperature Physics*, North-Holland 1984, str. 411.
- [27] W. Zawadzki, w *Physics of Solids in intense magnetic fields*, red. E. D. Haidemenakis, Plenum Press, New York 1969 str. 301; 311.
- [28] R. E. Prange, *Phys. Rev. B* **23**, 4802 (1981); R. E. Prange, R. Joynt, *Phys. Rev. B* **25**, 2943 (1982); R. Joynt, R. E. Prange, *Phys. Rev. B* **29**, 3303 (1984).
- [29] W. Erenig, *Z. Phys. B* **50**, 305 (1983).
- [30] J. T. Chalker, *J. Phys. C* **16**, 4297 (1983).
- [31] A. MacKinnon, *J. Phys. C* **16**, L945 (1983).
- [32] E. B. Hansen, *Physica* **123 B**, 183 (1984).
- [33] Y. Imry, *J. Phys. C* **15**, L221 (1982); **16**, 3501 (1983).
- [34] M. Ya. Azbel, *Phys. Rev. B* **26**, 3430 (1982).
- [35] I. D. Vagner, T. Maniv, E. Ehrenfreund, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1700 (1983).
- [36] D. J. Thouless, *J. Phys. C* **14**, 3475 (1981).
- [37] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, T. V. Ramakrishnan, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 673 (1979).
- [38] F. Wegner, *Phys. Rev. B* **19**, 783 (1979); *Z. Phys. B* **35**, 207 (1979).
- [39] H. Levine, S. B. Libby, A. M. M. Pruisken, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1915 (1983).
- [40] H. Aoki, *J. Phys. C* **10**, 2583 (1977); **16**, 1893 (1983); **17**, 1875 (1984).
- [41] T. Ando, *J. Phys. Soc. Jpn.* **52**, 1740 (1983); *Surf. Sci.* **113**, 182 (1982).
- [42] B. I. Halperin, *Phys. Rev. B* **25**, 2185 (1982).
- [43] A. H. MacDonald, P. Streda, *Phys. Rev. B* **B29**, 1616 (1984).

- [44] R. Rammal, G. Toulouse, M. T. Jaekel, B. I. Halperin, *Phys. Rev. B* **27**, 5142 (1983).
- [45] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. B* **23**, 5632 (1981); *Surf. Sci.* **113**, 22 (1982).
- [46] N. Byers, C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 46 (1961).
- [47] R. Tao, Y. S. Wu, *Phys. Rev. B* **30**, 1097 (1984).
- [48] P. Streda, L. Smrcka, *J. Phys. C* **16**, L895 (1983); L. Smrcka, *J. Phys. C* **17**, L63 (1984).
- [49] W. Walukiewicz, H. E. Ruda, J. Lagowski, H. C. Gatos, *Phys. Rev. B* **29**, 4818 (1984).
- [50] N. Levinson, K. Dan, *Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Medd.* **25**, 9 (1949).
- [51] R. Kubo, S. J. Miyake, N. Hashitsumo, *Solid State Phys.* **17**, 269 (1965).
- [52] T. Igarashi, J. Wakabayashi, S. Kawaji, *J. Phys. Soc. Jpn.* **38**, 1549 (1975).
- [53] H. Aoki, T. Ando, *Solid State Commun.* **38**, 1079 (1981).
- [54] P. Streda, *J. Phys. C* **15**; L717; L1299 (1982); **16**, L369 (1983).
- [55] N. A. Usnov, F. R. Ulinich, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **85**, 644 (1984).
- [56] G. Czycholl, *Solid State Commun.* **49**, 203 (1984).
- [57] D. C. Tsui, S. J. Allen Jr, *Phys. Rev. B* **24**, 4082 (1981).
- [58] S. V. Jordansky, *Solid State Commun.* **43**, 1 (1982).
- [59] R. F. Kazarinov, S. Luryi, *Phys. Rev. B* **25**, 7627 (1982).
- [60] S. Luryi, R. F. Kazarinov, *Phys. Rev. B* **27**, 1386 (1983).
- [61] S. A. Trugmann, *Phys. Rev. B* **27**, 7539 (1983).
- [62] H. Aoki, *J. Phys. C* **15**, L1227 (1982); **16**, L205 (1983).
- [63] H. Aoki, H. Kamimura, *Solid State Commun.* **21**, 45 (1977).
- [64] A. MacKinnon, B. Kramer, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1546 (1981).
- [65] L. Schweitzer, B. Kramer, A. MacKinnon, *J. Phys. C* **17**, 5231 (1984).
- [66] F. Wegner, *Z. Phys. B* **51**, 279 (1983).
- [67] S. M. Apenko, Y. E. Lozovik, *J. Phys. C* **16**, L591 (1983).
- [68] I. Affleck, *J. Phys. C* **17**, 2323 (1984).
- [69] S. Hikami, *Phys. Rev. B* **19**, 3726 (1984).
- [70] D. E. Khmel nitsky, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **38**, 454 (1983).
- [71] H. Levine, S. B. Libby, A. M. M. Pruisken, *Nucl. Phys. B* **240**, FS12 30, 49, 71 (1984).
- [72] K. Ono, *J. Phys. Soc. Jpn.* **51**, 237 (1982).
- [73] K. I. Wysokiński, B. Brenig, *Z. Phys. B* **54**, 11 (1983).
- [74] M. E. Cage, B. F. Field, R. F. Dziuba, S. M. Girvin, A. C. Gossard, D. C. Tsui, *Phys. Rev. B* **30**, 2286 (1984).
- [75] H. Obloh, K. von Klitzing, K. Ploog, *Surf. Sci.* **142**, 236 (1984).
- [76] S. M. Girvin, M. Jonson, *J. Phys. C* **15**, L1147 (1982).
- [77] W. Zawadzki, R. Lassnig, *Surf. Sci.* **142**, 225 (1984); *Solid State Commun.* **50**, 537 (1984).
- [78] W. Zawadzki, *J. Phys. C* **17**, L145 (1984).
- [79] B. Tausendfreund, K. von Klitzing, *Surf. Sci.* **142**, 220 (1984).
- [80] D. Yoshioka, H. Fukuyama, *J. Phys. Soc. Jpn.* **50**, 1560 (1980).
- [81] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1395 (1983); *Phys. Rev. B* **27**, 3383 (1983); *Surf. Sci.* **142**, 163 (1984).
- [82] F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 605 (1983).
- [83] P. W. Anderson, *Phys. Rev. B* **28**, 2264 (1983).
- [84] D. Yoshioka, B. I. Halperin, P. A. Lee, *Surf. Sci.* **142**, 155 (1984).
- [85] R. Tao, D. J. Thouless, *Phys. Rev. B* **28**, 1142 (1983).
- [86] R. Tao, *Phys. Rev. B* **29**, 636 (1984); *J. Phys. C* **17**, L53, L419 (1984).
- [87] D. J. Thouless, *Surf. Sci.* **142**, 147 (1984).
- [88] S. M. Girvin, T. Jack, *Phys. Rev. B* **28**, 5517, 6012; **30**, 473, 558 (1984).
- [89] I. E. Dzyaloshinsky, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **39**, 137 (1984).
- [90] M. H. Friedman, J. B. Sokoloff, A. Widom, Y. N. Srivastava, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1853 (1984).
- [91] B. I. Halperin, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1853 (1984).
- [92] D. Arovas, J. R. Schriffer, F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 722 (1984).